

Numerik partieller Differentialgleichungen

WS 2018/19 — Übung 1 — 23.10.2018

Abgabe: 30.10.2018

Aufgabe 1

(4 Punkte)

Bestimmen Sie den Typ (elliptisch, parabolisch, hyperbolisch) der folgenden Differentialoperatoren in zwei Raumkoordinaten, evtl. in Abhängigkeit von $x, u, \nabla u$.

- $u_{x_1 x_1} + \sin(2\pi x_1) u_{x_2 x_2}$,
- $u_{x_1 x_2}$,
- $-\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right)$,
- $u_t - \Delta \beta(u)$ mit $\beta(s) = \min(s, 0) + \max(s - 1, 0)$.

Aufgabe 2

(6 Punkte)

Zeigen Sie die folgenden Konsistenzabschätzungen:

- a) Für $u \in C^3[x - h, x + h]$ ist

$$\left| u'(x) - \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} \right| \leq \frac{1}{6} h^2 \|u'''\|_\infty.$$

- b) Für $u \in C^4[x - h, x + h]$ ist

$$\left| u''(x) - \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} \right| \leq \frac{1}{12} h^2 \|u^{(4)}\|_\infty.$$

- c) Für $u \in C^{3,1}[x - h, x + h]$ ist

$$\left| u''(x) - \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} \right| \leq ch^2 \operatorname{Lip}(u''').$$

Dabei bezeichnet $\|v\|_\infty = \max\{|v(y)| : x - h \leq y \leq x + h\}$

und $\operatorname{Lip}(v) = \max\left\{\frac{|v(y) - v(z)|}{|y - z|} : y \neq z\right\}$ die Lipschitzkonstante von v .

Aufgabe 3

(6 Punkte)

Zu $\alpha \in (0, 2)$ sei $\Omega_\alpha = \{(r \cos \phi, r \sin \phi) : 0 < r < 1, 0 < \phi < \alpha\pi\}$ das Kreissegment mit Öffnungswinkel $\alpha\pi$.

Zeigen Sie:

- a) Die Funktion $u_\alpha(r \cos \phi, r \sin \phi) = r^{\frac{1}{\alpha}} \sin\left(\frac{\phi}{\alpha}\right)$ löst das Randwertproblem

$$-\Delta u_\alpha = 0 \quad \text{in } \Omega_\alpha, \quad u_\alpha = r^{\frac{1}{\alpha}} \sin\left(\frac{\phi}{\alpha}\right) \quad \text{auf } \partial\Omega_\alpha.$$

- b) Für $\alpha > 1$ ist der Gradient ∇u_α auf Ω_α nicht beschränkt, d.h. $u_\alpha \notin C^1(\bar{\Omega})$.

- c) Für alle $\alpha \in (0, 2)$ ist

$$\int_{\Omega_\alpha} |\nabla u_\alpha|^2 < \infty.$$