Zentrum für Technomathematik

Prof. Dr. A. Schmidt
Dipl. math. Dipl. inf. J. Benke

Mathematische Grundlagen der Informatik I

WS 2003/04 — Übung 11 — 20.01.2004
Abgabe: 27.01.2004

Aufgabe 36 (4 Punkte)

Seien U, V, W drei $\mathbb{K}$-Vektorräume und $f : U \to V$, $g : V \to W$ lineare Abbildungen.
Zeigen Sie, dass dann die Verkettung

$$g \circ f : U \to W$$

ebenfalls eine lineare Abbildung ist (vgl. Satz 5.11 der Vorlesung).

Aufgabe 37 (4 Punkte)

Sei $F := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ Abbildung}\}$ der Vektorraum der reellwertigen Funktionen auf $\mathbb{R}$.
Zeigen Sie, dass zu einem gegebenen $x \in \mathbb{R}$ die Punktauswertung von Funktionen

$$P_x(f) := f(x)$$

eine lineare Abbildung $P_x : F \to \mathbb{R}$ definiert.
Beschreiben Sie Kern und Bild dieser Abbildung.

Aufgabe 38 (4 Punkte)

Seien U, V zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume.
Zeigen Sie, dass die Menge der linearen Abbildungen $f : U \to V$ einen $\mathbb{K}$-Vektorraum bildet.

(Falls $V = \mathbb{K}$, so nennt man diesen Raum auch den *Dualraum* von U.)

Aufgabe 39 (4 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Polynome $1, x, x^2, x^3, \ldots$ linear unabhängig in $\mathbb{R}[X]$ sind.

b) Zeigen Sie, dass sie eine Basis des Vektorraums $\mathbb{R}[X]$ bilden.