

Numerik II

WS 2001/2002 — Übung 9 — 07.01.2002
Abgabe: 16.01.2002

Aufgabe 24

(6 Punkte)

Zeigen Sie, dass das dreistufige eingebettete Runge-Kutta-Verfahren

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1 & 1 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} \end{array}$$

die Konsistenzordnung 2(3) besitzt.

Aufgabe 25

(8 Punkte)

a) Bestimmen Sie das eingebettete Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung 1(2) mit zwei Stufen und der Bedingung

$$a_{21} = b_1.$$

b) Vergleichen Sie den geschätzten Fehler für dieses eingebettete Runge-Kutta-Verfahren bei Anwendung auf das skalare Problem

$$y' = \lambda y, \quad y(0) = 1$$

mit der entsprechenden Fehlerschätzung bei der Richardson-Extrapolation.

Programmieraufgabe 4 Abgabe: 21.01.2002

(8 Punkte)

a) Schreiben Sie ein Matlab-Programm zur Lösung der differentiellen Johnson-Mehl-Avrami-Gleichung (vgl. Aufgabe 21):

$$p'(t) = (p - \bar{p}(\theta)) \frac{n(\theta)}{\tau(\theta)} \left(-\log \left(1 - \frac{p(t)}{\bar{p}(\theta)} \right) \right)^{1 - \frac{1}{n(\theta)}}, \quad p(t_0) = p_0.$$

Dabei seien $\bar{p}(\theta), n(\theta), \tau(\theta)$ gegebene Funktionen der Temperatur θ sowie $p_0 \in [0, \bar{p})$ ein gegebener Anfangswert zur Zeit $t_0 \geq 0$.

Verwenden Sie dazu die Matlab-Funktionen `ode23()` bzw. `ode45()`. Informieren Sie sich über deren Benutzung und vergleichen Sie die Ergebnisse für verschiedene Fehlertoleranzen und Anfangswerte p_0 nahe Null für die Parameter

$$\bar{p} = 1.0, \quad n = 2.0, \quad \tau = 130.0$$

auf dem Zeitintervall $[t_0, T] = [0, 400]$.

b) Erstellen Sie mit Hilfe Ihres Programms das *isotherme ZTU-Diagramm* für die Austenit-Perlit Phasenumwandlung in einem Stahl. Dies gibt den ungefähren Zeitpunkt des Anfangs und des Endes einer Phasenumwandlung bei verschiedenen Temperaturen an.

Bestimmen Sie dazu für Temperaturen $\theta = 505, 510, \dots, 745$ jeweils die Zeiten $t_{1\%}$ und $t_{99\%}$, bei denen der Perlit-Phasenanteil $p(t_{1\%}) = 0.01$ bzw. $p(t_{99\%}) = 0.99$ beträgt. Erstellen Sie aus diesen Daten ein Diagramm, in dem $t_{1\%}$ und $t_{99\%}$ gegen die Temperatur aufgetragen sind (x -Achse Zeit logarithmisch, y -Achse Temperatur). Verwenden Sie im angegebenen Temperaturbereich die Parameter

$$\begin{aligned} \bar{p}(\theta) &= 1.0, \\ \tau(\theta) &= \frac{(\theta - 500)^2}{1000} + 4.0 \cdot 10^7 \exp(-0.023 \theta) + 5.14 \cdot 10^{-21} \exp(0.0729 \theta), \\ n(\theta) &= 1.8 + 3.7 \exp\left(-\frac{(\theta - 650)^2}{5000}\right). \end{aligned}$$

Ein Beispiel für solch ein ZTU-Diagramm (mit anderen Parametern gerechnet) zeigt das nebenstehende Bild.

