Zentrum für Technomathematik

Prof. Dr. A. Schmidt
M.Sc. A. Narimanyan

Numerik II

WS 2001/2002 — Übung 8 — 12.12.2001
Abgabe: 19.12.2001

Aufgabe 21 (6 Punkte)

Die Austenit–Perlit Phasenumwandlung in Stahl bei konstanter Temperatur kann durch die Johnson-Mehl-Avrami-Gleichung

$$\text{(JMA)} \qquad p(t) = \bar{p}\left(1 - \exp\left(-\left(\frac{t}{\tau}\right)^n\right)\right), \qquad t \geq 0$$

modelliert werden. Dabei bezeichnet $p(t)$ den Perlit-Anteil zur Zeit $t \geq 0$, $\bar{p} \in [0,1]$ ist der Gleichgewichts-Perlit-Anteil und $n, \tau \in \mathbb{R}$ sind positive, ebenfalls Material- und Temperaturabhängige Parameter.

a) Skizzieren Sie den Graphen von p.

b) Leiten Sie aus (JMA) eine autonome gewöhnliche Differentialgleichung her der Form

$$p' = f(p).$$

Geben Sie den Definitionsbereich G der Funktion f an.

c) Zeigen Sie, dass für Anfangswerte $p(t_0) \in [0, \bar{p}]$ die Lösung der Differentialgleichung $p(t) \in [0, \bar{p}]$ für alle $t \geq t_0$ erfüllt, für $p(t_0) = 0$ gilt $p(t) \equiv 0$.

Aufgabe 22 (4 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Verfahrensfunktionen für das implizite Eulerverfahren und für das Trapezverfahren im Falle

$$f(t,y) = \lambda y, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

die Gestalt

$$\varphi(t,y,h) = \frac{\lambda}{1 - h\lambda}\, y \qquad \text{bzw.} \qquad \varphi(t,y,h) = \frac{\lambda}{1 - \frac{1}{2}h\lambda}\, y$$

haben.

b) Zeigen Sie für äquidistante Gitter dass die Verfahren die Ordnung 1 bzw. 2 besitzen.

Aufgabe 23 (6 Punkte)

Sei $f(t,y) : \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}^d$ Lipschitz-stetig bezüglich y mit der Lipschitz-Konstanten L.
Zeigen Sie: Dann lässt sich das implizite Euler-Verfahren für hinreichend kleine Schrittweiten h als Einschrittverfahren auffassen, und durch die implizite Form wird eine Verfahrensfunktion $\varphi(t,y,h)$ definiert, die Lipschitz-stetig bezüglich y ist.