Zentrum für Technomathematik

Prof. Dr. A. Schmidt
M.Sc. A. Narimanyan

Numerik II

WS 2001/2002 — Übung 6 — 28.11.2001
Abgabe: 05.12.2001

Aufgabe 17 (CGN-Verfahren) (4 Punkte)
Seien $M \leq N$ und $A \in \mathbb{R}^{N \times M}$ eine (unsymmetrische) Matrix. Zur Lösung des Approximationsproblems

$$\text{minimiere} \quad \|b - Ax\|_2$$

können auch die *Normalengleichungen*

$$A^T A x = A^T b$$

betrachtet werden. Wenden Sie den CG-Algorithmus auf das System der Normalengleichungen an und leiten Sie eine Version her, in der beide Residuen $r_k = b - Ax_k$ und $z_k = A^T b - A^T A x_k$ berechnet werden.

Aufgabe 18 (4 Punkte)
Seien $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ regulär und strikt diagonaldominant sowie $D = \text{diag}(a_{ii})$ die Diagonale von A. Zeigen Sie: Dann ist

$$\rho(I - D^{-1}A) < 1$$

und es gilt

$$A^{-1} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} (I - D^{-1}A)^k \right) D^{-1}.$$

Tip: Vgl. Aufgabe 10.

Programmieraufgabe 3 Abgabe: 10.12.2001 (8 Punkte)

a) Erweitern Sie Ihr Programm aus Programmieraufgabe 2 zu einer Implementierung des **vorkonditionierten CG-Verfahrens** für dünn besetzte Matrizen.

b) Implementieren Sie den **Symmetrischen Gauß-Seidel Vorkonditionierer** sowie den **Incomplete Cholesky Vorkonditionierer** (verwenden Sie dazu die Matlab-Funktion `cholinc()`).

c) Lösen Sie damit das 1D Finite Differenzen Problem aus Programmieraufgabe 1b für Schrittweiten $h = 1/(n+1)$ mit $n = 10, 100, 1000$. Welched Konvergenzverhalten beobachten Sie?

d) Lösen Sie damit das 2D Finite Differenzen Problem aus Programmieraufgabe 1c für Schrittweiten $h = 1/(n+1)$ mit $n = 10, 32, 100$. Welche Konvergenzverhalten beobachten Sie?

e) **Freiwillige Zusatzaufgabe:** Implementieren Sie den **SSOR Vorkonditionierer** und testen Sie das Konvergenzverhalten für Relaxationsparameter $\omega = 2/(1 + c\,h)$ mit $c > 0$.