Zentrum für Technomathematik

Prof. Dr. A. Schmidt
M.Sc. A. Narimanyan

Numerik II

WS 2001/2002 — Übung 5 — 21.11.2001
Abgabe: 28.11.2001

Aufgabe 13 (4 Punkte)

Sei $x_k = x_0 + V_k y_k$ die Näherungslösung im k-ten Schritt des FOM-Verfahrens. Zeigen Sie für das Residuum:

$$\|b - Ax_k\|_2 = h_{k+1,k}|e_k^T y_k|.$$

Tip: Zeigen Sie dazu dass gilt: $b - Ax_k = -h_{k+1,k} e_k^T y_k v_{k+1}$.

Aufgabe 14 (4 Punkte)

Zeigen Sie wie die FOM- und GMRES-Verfahren für das Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bei Startvektor $x_0 = 0$ konvergieren.

Aufgabe 15 (4 Punkte)

Beweisen Sie Lemma 3.21 der Vorlesung: Nach k Schritten des Arnoldi-Verfahrens sei H_k regulär. Dann gilt für Residuen r_k^F, r_k^G des FOM- bzw. GMRES-Verfahrens die Beziehung

$$\|r_k^F\|_2 = \frac{1}{c_k}\|r_k^G\|_2 = \sqrt{1 + \frac{h_{k+1,k}^2}{((G\bar{H}_k)_{k,k})^2}}\|r_k^G\|_2.$$

Dabei bezeichnen $G = G_{k-1} \cdots G_1$ das Produkt der ersten $k-1$ Givens-Rotationen und c_k der Cosinus der k-ten Givens-Rotation zur Transformation von $\bar{H}_k$ auf obere Dreiecksgestalt.