Zentrum für Technomathematik

Prof. Dr. A. Schmidt
M.Sc. A. Narimanyan

Numerik II

WS 2001/2002 — Übung 3 — 07.11.2001
Abgabe: 14.11.2001

Aufgabe 8 (Tschebyscheff-Polynome) (8 Punkte)
Für $x \in (-1,1)$ und $m \in \mathbb{N}_0$ sei

$$T_m(x) = \cos(m \arccos x).$$

Zeigen Sie:

a) $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$ und

$$T_{m+1}(x) = 2x\, T_m(x) - T_{m-1}(x), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Tip: Vollständige Induktion.

b) T_m ist ein Polynom vom Grad m und kann somit auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden.

c) Es gilt

$$T_m\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(x^m + \frac{1}{x^m}\right).$$

Tip: Vollständige Induktion auch hier.

d) Für $|x| \geq 1$ gilt

$$T_m(x) = \frac{1}{2}\Big((x + \sqrt{x^2-1})^m + (x + \sqrt{x^2-1})^{-m}\Big).$$

Aufgabe 9 (4 Punkte)
Sei $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix und $\lambda_{\min}, \lambda_{\max}$ ihr kleinster bzw. größter Eigenwert. Beweisen Sie Satz 3.5 der Vorlesung: Für die Iterierten x_k des Gradientenverfahrens gilt

$$\|x^* - x_k\|_A \leq \left(\frac{\mathrm{cond}_2(A) - 1}{\mathrm{cond}_2(A) + 1}\right)^k \|x^* - x_0\|_A.$$

Verwenden Sie zum Beweis die Ungleichung von Kantorovich: Für alle $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ gilt:

$$\frac{(Ax,x)(A^{-1}x,x)}{(x,x)^2} \leq \frac{(\lambda_{\max} + \lambda_{\min})^2}{4\lambda_{\max}\lambda_{\min}}$$

Aufgabe 10 (4 Punkte)
Sei $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ mit Spektralradius $\rho(I - A) < 1$. Zeigen Sie: Dann ist A regulär und die Inverse A^{-1} besitzt die Darstellung in der Form einer Neumannschen Reihe

$$A^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (I - A)^k.$$