Zentrum für Technomathematik

Prof. Dr. A. Schmidt
M.Sc. A. Narimanyan

Numerik II

WS 2001/2002 — Übung 2 — 29.10.2001
Abgabe: 31.10.2001

Aufgabe 5 (4 Punkte)
a) Zeigen Sie, dass die Jacobi-Iterationsmatrix $M_J = -D^{-1}(L+R)$ zur 1D Finite Differenzen Matrix für $-u''$ zur Schrittweite $h = 1/(n+1)$ die folgenden Eigenwerte λ^k mit Eigenvektoren v^k, $k = 1, \ldots, n$, besitzt:

$$\lambda^k = \cos\frac{k\pi}{n+1}, \qquad v_i^k = \sin\frac{ik\pi}{n+1}.$$

b) Zeigen Sie, dass die Jacobi-Iterationsmatrix $M_J = -D^{-1}(L+R)$ zur 2D Finite Differenzen Matrix für $-\Delta u$ zur Schrittweite $h = 1/(n+1)$ die folgenden Eigenwerte $\lambda^{k,l}$ mit Eigenvektoren $v^{k,l}$, $k, l = 1, \ldots, n$, besitzt:

$$\lambda^{k,l} = \frac{1}{2}\Big(\cos\frac{k\pi}{n+1} + cos\frac{l\pi}{n+1}\Big), \qquad v_{i,j}^{k,l} = \sin\frac{ik\pi}{n+1}\sin\frac{jl\pi}{n+1}.$$

Aufgabe 6 (2 Punkte)
Bestimmen Sie die optimalen Relaxationsparameter ω_{opt} für die 1D bzw. 2D Finite Differenzen Matrizen zur Schrittweite $h = 1/(n+1)$.

Aufgabe 7 (2 Punkte)
Zeigen Sie: Die SSOR-Iteration für eine hermitesche Matrix A ergibt eine hermitesche Iterationsmatrix N_{SSOR} in der Darstellung $x_{k+1} = x_k + N_{\mathrm{SSOR}}(b - Ax_k)$.

Programmieraufgabe 1 Abgabe: 05.11.2001 (8 Punkte)
a) Implementieren Sie das Jacobi- und das SOR-Verfahren für dünn besetzte Matrizen. Verwenden Sie dazu in MATLAB *sparse* Matrizen.

b) Lösen Sie damit die 1D Finite Differenzen Approximation zum Problem

$$\begin{aligned} -u''(x) &= \pi^2 \sin(\pi x) \qquad \text{in } \Omega = (0,1), \\ u(0) = u(1) &= 0. \end{aligned}$$

Verwenden Sie dabei Schrittweiten $h = 1/(n+1)$ mit $n = 10, 100, 1000$ und SOR-Parameter $\omega = 1, \omega_{opt}$. Welches Verhalten der Konvergenzgeschwindigkeiten beobachten Sie? Welches Verhalten zeigt die Approximation der exakten Lösung, gemessen durch $\max_{i=1,\ldots,n} |u_i - u(x_i)|$?

c) Lösen Sie damit die 2D Finite Differenzen Approximation zum Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 1 \qquad \text{in } \Omega = (0,1)^2, \\ u &= 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Verwenden Sie dabei Schrittweiten $h = 1/(n+1)$ mit $n = 10, 32, 100$ und SOR-Parameter $\omega = 1, \omega_{opt}$. Welches Verhalten der Konvergenzgeschwindigkeiten beobachten Sie?