Zentrum für Technomathematik

Prof. Dr. A. Schmidt
M.Sc. A. Narimanyan

Numerik II

WS 2001/2002 — Übung 11 — 23.01.2002
Abgabe: 30.01.2002

Aufgabe 29 (8 Punkte)
Beweisen Sie den Satz: Ein lineares Mehrschrittverfahren (ρ, σ) ist genau dann konsistent mit Ordnung $p \geq 1$, wenn eine Konstante $c \neq 0$ existiert mit

$$\rho(w) - \sigma(w)\ln(w) = c(w-1)^{p+1} + O(|w-1|^{p+2}), \quad w \to 1.$$

Tip: a) Das Verfahren ist genau dann von Ordnung p, wenn

$$\psi(t,y) := \sum_{i=0}^{k} a_i y(t+ih) - h\sum_{i=0}^{k} b_i y'(t+ih) = O(h^{p+1}).$$

Entwickeln Sie ψ in eine Taylor-Reihe und bestimmen Sie Bedingungen an die Koeffizienten, damit das Verfahren Ordnung p hat.
b) Zeigen für $w = e^z$ dass Konsistenzordnung p genau bei

$$\rho(e^z) - z\sigma(e^z) = cz^{p+1} + O(z^{p+2})$$

gilt (mit Hilfe der Reihendarstellung von e^z) und folgern Sie die Behauptung.

Aufgabe 30 (4 Punkte)
Verwenden Sie den Satz aus Aufgabe 29 und bestimmen Sie damit die Konsistenzordnungen der beiden Adams-Bashforth-Verfahren

$$y_{j+2} = y_{j+1} + h\left(\frac{3}{2}f(t_{j+1}, y_{j+1}) - \frac{1}{2}f(t_j, y_j)\right)$$

sowie

$$y_{j+3} = y_{j+2} + h\left(\frac{23}{12}f(t_{j+2}, y_{j+2}) - \frac{4}{3}f(t_{j+1}, y_{j+1}) + \frac{5}{12}f(t_j, y_j)\right).$$

Tip: Verwenden Sie die Reihenentwicklung

$$\ln(w) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i} z^i \quad \text{mit} \quad z = w-1$$

und stellen Sie auch ρ und σ in Potenzen von z dar.

Programmieraufgabe auf der Rückseite

Programmieraufgabe 5 Abgabe: 04.02.2002 (8 Punkte)

Eine Randwertaufgabe für ein System gewöhnlicher DGLn

Die Erstarrung einer unterkühlten Flüssigkeit kann durch eine Phasenfeld-Gleichung, ein System partieller Differentialgleichungen für die Temperatur $\theta(x,t)$ und die Phasenvariable $\varphi(x,t)$, modelliert werden. Eine gerade Erstarrungsfront, die sich mit konstanter Geschwindigkeit v bewegt, wird durch eine eine wandernde Welle (*travelling wave*) mit $\theta = \theta(x+vt)$, $\varphi = \varphi(x+vt)$ beschrieben. Für diese Funktionen, die nur noch von einer Variablen $s = x + vt$ abhängen, gilt dann das folgende System gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung im Intervall $I = (0, w)$:

$$\begin{aligned} v\theta' + \lambda v\varphi' - \theta'' &= 0, \\ \varepsilon v\varphi' - \alpha\varepsilon\varphi'' - \frac{\beta}{\varepsilon}\varphi &= \gamma\theta. \end{aligned}$$

Dabei sind $v \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon, \alpha, \beta, \gamma, \lambda \in \mathbb{R}_+$ gegebene Parameter. Für die Phasenvariable φ gelten die Randbedingungen

$$\varphi(0) = -1, \quad \varphi'(0) = 0, \quad \varphi(w) = +1, \quad \varphi'(w) = 0.$$

a) Schreiben Sie das obige Gleichungssystem als System gewöhnlicher DGLn erster Ordnung für $\theta, \theta', \varphi, \varphi'$.

b) Schreiben Sie ein Programm zur Lösung dieses Systems. Verwenden Sie dazu das MUS Paket (zu finden im Internet über `www.netlib.org` unter `ode`) oder ein anderes Programmpaket zur Lösung von **Randwertaufgaben gewöhnlicher DGLn**. Machen Sie sich selbst mit der Benutzung der Routinen vertraut.

c) Berechnen Sie damit die Lösung zu den Daten

$$\varepsilon = 0.01, \quad \alpha = 0.01, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 1, \quad \lambda = 1, \quad v = -1, \quad w = 0.1.$$

d) Berechnen Sie zusätzlich die Lösung zu den Daten

$$\varepsilon = 0.1, \quad \alpha = 1, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 1, \quad \lambda = 1, \quad v = -1$$

und versuchen Sie die Intervalllänge w so zu bestimmen dass die Ableitung der Temperatur am linken Intervallrand verschwindet,

$$\theta'(0) = 0.$$

Die Ergebnisse Ihrer Simulationen sollten wie folgt aussehen (links $\beta = 0$, rechts $\beta = 1$):