Zentrum für Technomathematik

Prof. Dr. A. Schmidt
M.Sc. A. Narimanyan

Numerik II

WS 2001/2002 — Übung 1 — 17.10.2001
Abgabe: 24.10.2001

Aufgabe 1 (6 Punkte)
a) Seien $\|\cdot\|_N$ und $\|\cdot\|_M$ Normen auf den Vektorräumen $\mathbb{C}^N$ bzw. $\mathbb{C}^M$. Zeigen Sie, dass die induzierte Matrixnorm

$$\|A\|_{N,M} = \sup_{x \in \mathbb{C}^M \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_N}{\|x\|_M}$$

eine Norm auf dem Vektorraum $\mathbb{C}^{N\times M}$ der komplexen $(N \times M)$-Matrizen definiert.

b) Berechnen Sie die Matrixnormen für quadratische komplexe $(N \times N)$-Matrizen, welche durch folgende Vektornormen auf $\mathbb{C}^N$ (jeweils gleiche Norm auf Urbild- und Bildraum) induziert werden:

i) l^1-Norm $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^N |x_i|$,

ii) Maximums-Norm $\|x\|_\infty = \max_{i=1}^N |x_i|$.

Zeigen Sie weiterhin, dass durch die l^2-Norm $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^N |x_i|^2\right)^{1/2}$ die Matrixnorm $\|A\|_2 = (\rho(A^H A))^{1/2}$ induziert wird. Für eine Hermitesche Matrix A gilt also $\|A\|_2 = \rho(A)$.
Dabei bezeichnet $\rho(A)$ den Spektralradius der Matrix A und $A^H = \bar{A}^T$ die komplex konjugierte Transponierte von A.

Aufgabe 2 (2 Punkte)
Der Spektralradius $\rho(A)$ einer Matrix definiert im allgemeinen keine Matrix-Norm. Geben Sie Matrizen A, B an mit

i) $A \neq 0$ aber $\rho(A) = 0$,

ii) $\rho(A + B) > \rho(A) + \rho(B)$.

Aufgabe 3 (2 Punkte)
Zeigen Sie, dass für jede induzierte Matrixnorm auf $\mathbb{C}^{N\times N}$ gilt:

$$\|A\| \geq \rho(A).$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass für jede induzierte Matrixnorm auf $\mathbb{C}^{N\times N}$ gilt:

$$\lim_{k\to\infty} \|A^k\|^{1/k} = \rho(A).$$

Tip: Verwenden Sie die Jordansche Normalform von A.