Zentrum für Technomathematik

Prof. Dr. A. Schmidt
M.Sc. A. Narimanyan

Numerik partieller Differentialgleichungen

SS 2002 — Übung 9 — 13.06.2002
Abgabe: Donnerstag, 20.06.2002

Das Neumann-Problem für die Poisson-Gleichung
Sei im folgenden $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d \leq 3)$ ein beschränktes, polygonales Gebiet.

Aufgabe 26 (4 Punkte)
Sei $u \in H^2(\Omega)$ Lösung des Neumann-Problems

$$(N): \qquad -\Delta u = f \text{ in } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = g \text{ auf } \partial\Omega.$$

Zeigen Sie: Dann gilt

$$\int_\Omega f + \int_{\partial\Omega} g = 0$$

und zwei Lösungen $u_1, u_2 \in H^2(\Omega)$ unterscheiden sich nur um eine Konstante, d.h. $\exists c \in \mathbb{R}$: $u_1 = u_2 + c$. Sei $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ mit der Norm $\|v\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}} := \inf_{c\in\mathbb{R}} \|v + c\|_{H^1(\Omega)}$ versehen. Zeigen Sie weiterhin: Zu jedem Paar $(f, g) \in L^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$ mit $\int_\Omega f + \int_{\partial\Omega} g = 0$ gibt es genau eine schwache Lösung des Neumann-Problems (N), d.h. genau ein $u \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ mit

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi = \int_\Omega f\varphi + \int_{\partial\Omega} g\varphi \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}.$$

Aufgabe 27 (4 Punkte)
Sei $\mathcal{S}$ eine zulässige Triangulierung von Ω und $X_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) : v_h|_S \in \mathbb{P}_1 \forall S \in \mathcal{S}\}$. Seien $f \in L^2(\Omega), g \in H^1(\Omega)$ mit $\int_\Omega f + \int_{\partial\Omega} g = 0$. Zeigen Sie: Dann gibt es genau eine Lösung $u_h \in X_h$ mit $\int_\Omega u_h = 0$ des diskreten Problems

$$\int_\Omega \nabla u_h \nabla \varphi_h = \int_\Omega f\varphi_h + \int_{\partial\Omega} g\varphi_h \quad \forall \varphi_h \in X_h.$$

Falls zusätzlich $u \in H^2(\Omega)$, dann gibt es ein $c > 0$ so dass

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}} \leq c\, h |u|_{H^2(\Omega)}.$$

Aufgabe 28 (4 Punkte)
Zeigen Sie: Ersetzt man im diskreten Problem aus Aufgabe 26 die Funktion g durch

$$g_h := Ig - \frac{1}{|\Omega|}\left(\int_{\partial\Omega} Ig + \int_\Omega f\right),$$

so gilt für $g \in H^2(\Omega)$ die Fehlerabschätzung

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq c\, h \left(|u|_{H^2(\Omega)} + |g|_{H^2(\Omega)}\right).$$

Dabei ist $Ig \in X_h$ die Interpolierende zu g.