Zentrum für Technomathematik

Prof. Dr. A. Schmidt
M.Sc. A. Narimanyan

Numerik partieller Differentialgleichungen

SS 2002 — Übung 8 — 06.06.2002
Abgabe: Donnerstag, 13.06.2002

Aufgabe 23 (L^2-Projektion) (4 Punkte)
Es sei $\mathcal{S}$ eine konforme und nicht degenerierte Triangulierung von $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und $X_h = \{v_h \in L^2(\Omega) \ : \ v_h|_{\mathring{S}} \in \mathbb{P}_k(\mathring{S})$ für alle $S \in \mathcal{S}\}$.
Zeigen Sie: Zu jedem $u \in L^2(\Omega)$ gibt es genau ein $u_h \in X_h$, so dass

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} = \inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_{L^2(\Omega)}$$

gilt. u_h ist die eindeutige Lösung von

$$\int_\Omega u_h \varphi_h = \int_\Omega u \varphi_h \qquad \forall \varphi_h \in X_h.$$

Außerdem gibt es ein $c > 0$ so dass für $u \in H^1(\Omega)$ gilt:

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq c\, h(\mathcal{S}) \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

mit $h(\mathcal{S}) = \max\limits_{S \in \mathcal{S}} h(S)$.

Aufgabe 24 (Anisotrope Rechteck-Elemente) (4 Punkte)
Es seien $R_0 = (0,1)^d$ der d-dimensionale Einheitswürfel und R ein achsenparalleler Quader, affin äquivalent zu R_0 mit der Abbildung

$$F : R_0 \to R, \quad F(y) = Ay + b, \quad A = \operatorname{diag}(h_1, \ldots, h_d).$$

a) Zeigen Sie, dass mit $m \in \mathbb{N}_0$ für $|\alpha| \leq m$, $v \in H^m(R)$ und $\hat{v} := v \circ F$ gilt:

$$\|D^\alpha \hat{v}\|_{L^2(R_0)} = h^{\alpha - \frac{1}{2}} \|D^\alpha v\|_{L^2(R)}.$$

Dabei bezeichnet $h^{\alpha - \frac{1}{2}} = \prod\limits_{i=1}^{d} h_i^{\alpha_i - \frac{1}{2}}$.

b) Sei $\mathbb{P}(R_0)$ ein endlichdimensionaler Funktionenraum auf R_0 und $\mathbb{P}(R)$ der auf R transformierte Raum. Zeigen Sie, dass es dann eine Konstante $c > 0$ gibt so dass für alle $p \in \mathbb{P}$ und $i = 1, \ldots, d$ gilt:

$$\left\| \frac{\partial p}{\partial x_i} \right\|_{L^2(R)} \leq c \frac{1}{h_i} \|p\|_{L^2(R)}.$$

Aufgabe 25 (Skalierter Spursatz) (4 Punkte)
Es sei S ein reguläres Dreieck mit $h \leq \sigma\rho$ und Randkante Γ. Zeigen Sie, dass für $v \in H^1(S)$ gilt:

$$\|v\|_{L^2(S)} \leq c \left(h^{-\frac{1}{2}} \|v\|_{L^2(S)} + h^{\frac{1}{2}} \|\nabla v\|_{L^2(S)} \right).$$

Transformieren Sie dazu S auf das Standardelement $\hat{S}$ wobei $\hat{\Gamma} = (0,1) \times \{0\}$ sei. Setzen Sie $\hat{v}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \hat{v}(1 - \hat{x}_2, 1 - \hat{x}_1)$ für $\hat{x}_2 > 1 - \hat{x}_1$ auf das Einheitsquadrat $(0,1)^2$ fort und verwenden Sie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung in $\hat{x}_2$–Richtung.