

Numerik partieller Differentialgleichungen

SS 2002 — Übung 7 — 30.05.2002

Abgabe: Donnerstag, 06.06.2002

Aufgabe 21

(8 Punkte)

Es sei $I = (0, 1)$ und f sei gegeben durch

$$f(\varphi) = \varphi\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{für alle } \varphi \in H_0^1(I).$$

- a) Zeigen Sie, dass $f \in H^{-1}(I)$ gilt.
b) Bestimmen Sie die schwache Lösung $u \in H_0^1(I)$ von

$$-u'' = f, \quad u(0) = u(1) = 0.$$

- c) Es sei $\mathcal{S} = \{(x_i, x_{i+1}) \mid i = 0, \dots, n, 0 = x_0 < \dots < x_{n+1} = 1\}$ eine Zerlegung von I und

$$X_h = \{v_h \in C^0(\bar{I}) \mid v_h|_{(x_i, x_{i+1})} \in \mathbb{P}_1, i = 0, \dots, n\}.$$

Dabei sei $n \geq 1$ und $x_i = \frac{1}{2}$ für ein i .

Erstellen Sie das zugehörige diskrete Gleichungssystem und berechnen Sie die diskrete Lösung $u_h \in X_{h,0} := X_h \cap H_0^1(I)$.

Zum diskreten Maximumprinzip für lineare Finite Elemente Funktionen

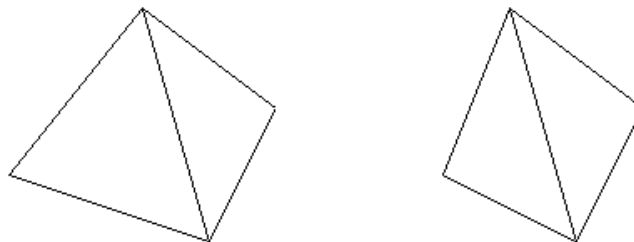
Aufgabe 22

(4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ zulässig trianguliert durch \mathcal{S} und $(\varphi_i)_{i=1, \dots, N}$ die Knotenbasis zu den stückweise linearen Finiten Elementen auf \mathcal{S} . Zeigen Sie: Wenn gelten soll

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j \leq 0 \quad \forall i \neq j$$

dann muss die Triangulierung \mathcal{S} *schwach spitz* sein, d.h. für je zwei benachbarte Dreiecke $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$ mit gemeinsamer Kante $E = S_1 \cap S_2$ darf die Summe der beiden Winkel in S_1, S_2 gegenüber E nicht größer als 180° sein.



Links: schwach spitze Triangulierung, rechts: nicht schwach spitz