Zentrum für Technomathematik

Prof. Dr. A. Schmidt
M.Sc. A. Narimanyan

# Numerik partieller Differentialgleichungen

SS 2002 — Übung 6 — 23.05.2002
Abgabe: Donnerstag, 30.05.2002

**Aufgabe 18** (4 Punkte)
a) Sei $\hat{S}$ der zweidimensionale Einheitssimplex und $\hat{\varphi}_0, \hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2$ seien die linearen Polynome mit $\hat{\varphi}_i(\hat{a}_j) = \delta_{i,j}$, $i, j = 0, 1, 2$. Berechnen Sie

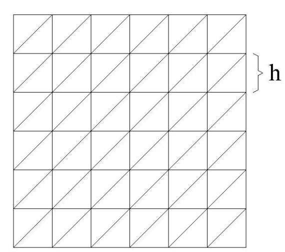
$$\left( \int_{\hat{S}} \nabla \hat{\varphi}_i \nabla \hat{\varphi}_j \right)_{i,j=0,1,2}.$$

b) Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und $\mathcal{S}$ eine nicht degenerierte Triangulierung von $\Omega$. $S$ sei ein Dreieck der Triangulierung mit Eckpunkten $a_0, a_1, a_2$ und $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ seien die linearen Funktionen mit $\varphi_i(a_j) = \delta_{i,j}$, $i, j = 0, 1, 2$. Berechnen Sie mit Hilfe der affin linearen Transformation $F_S : \hat{S} \to S$ und a) die Elementsteifigkeitsmatrix

$$\left( \int_{S} \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j \right)_{i,j=0,1,2}.$$

**Aufgabe 19** (4 Punkte)
Sei $\Omega = (0,1)^2$ trianguliert durch die rechts skizzierte Triangulierung $\mathcal{S}$ mit Gitterweite $h = \frac{1}{n}$. Seien $\phi_{ij}$, $i, j = 0, \ldots, n$ die Knotenbasisfunktionen der stückweise linearen Elemente auf $\mathcal{S}$ zu den Punkten $a_{ij} = \binom{ih}{jh}$. Berechnen Sie die Matrix

$$A = \left( \int_{\Omega} \nabla \phi_{ij} \cdot \nabla \phi_{kl} \right)_{i,j,k,l=1,\ldots,n-1}.$$




**Aufgabe 20** (6 Punkte)
Sei $S$ ein Simplex im $\mathbb{R}^d$ mit baryzentrischen Koordinaten $\lambda_0(x), \ldots, \lambda_d(x)$. Zeigen Sie, dass für $\alpha \in \mathbb{N}_0^{d+1}$

$$\int_S \lambda^\alpha(x)\, dx = \frac{\alpha!\, d!}{(|\alpha| + d)!} |S|$$

gilt. Dabei ist $\lambda^\alpha = \lambda_0^{\alpha_0} \cdot \ldots \cdot \lambda_d^{\alpha_d}$, $|\alpha| = \alpha_0 + \ldots + \alpha_d$ und $\alpha! = \alpha_0! \cdot \ldots \cdot \alpha_d!$.

Tip: Induktion über $d$.