Zentrum für Technomathematik

Prof. Dr. A. Schmidt
M.Sc. A. Narimanyan

Numerik partieller Differentialgleichungen

SS 2002 — Übung 5 — 16.05.2002
Abgabe: Donnerstag, 23.05.2002

Aufgabe 14 (Kettenregel für Sobolev-Funktionen) (4 Punkte)
Sei $f \in C^1(\mathbb{R})$ mit $\sup |f'| \le M < \infty$ und $u \in H^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt.
Zeigen Sie: Dann ist $f \circ u \in H^1(\Omega)$ und

$$\frac{\partial(f \circ u)}{\partial x_i} = f'(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}, \qquad i = 1, \dots, d.$$

Tip: Approximiere u.

Aufgabe 15 (4 Punkte)
Wir schreiben $u^+(x) = \max(u(x), 0)$ und $u^-(x) = \min(u(x), 0)$. Zeigen Sie, dass für $u \in H^1(\Omega)$ gilt: $u^+, u^-, |u| \in H^1(\Omega)$ und

$$\frac{\partial u^+}{\partial x_i} = \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_i} & u > 0, \\ 0 & u \le 0, \end{cases} \qquad \frac{\partial u^-}{\partial x_i} = \begin{cases} 0 & u \ge 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x_i} & u < 0, \end{cases} \qquad \frac{\partial |u|}{\partial x_i} = \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_i} & u > 0, \\ 0 & u = 0, \\ -\frac{\partial u}{\partial x_i} & u < 0. \end{cases}$$

Tip: Definiere $f_\varepsilon(s) := \begin{cases} \sqrt{s^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon & s > 0, \\ 0 & s \le 0 \end{cases}$ und wende Aufgabe 14 auf f_ε an.

Aufgabe 16 (4 Punkte)
Beweisen Sie das folgende Maximumprinzip:
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet, und $u \in H_0^1(\Omega)$ schwache Lösung des Problems

$$-\Delta u + c\,u = f \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

mit $f \in L^2(\Omega)$ und $c \in L^\infty(\Omega)$, $c \ge 0$, d.h.

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi + c\,u\,\varphi = \int_\Omega f\varphi \qquad \text{für alle } \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Dann gilt: Ist $f \le 0$, so ist auch $u \le 0$.

Tip: Testen der Gleichung mit u^+, vgl. Aufgabe 15.

Aufgabe 17 (6 Punkte)
Sei S ein nicht entartetes d-dimensionales Simplex im $\mathbb{R}^d$ mit Eckpunkten $a_0, \dots, a_d$.
Zeigen Sie: Es gibt genau eine affine Abbildung $F : S_0 \to S$, $F(\bar{x}) = A\bar{x} + b$ mit einer $d \times d$-Matrix A, $\det A \ne 0$, und einem $b \in \mathbb{R}^d$ so dass $F(e_j) = a_j, j = 0, \dots, d$. Ausserdem gelten die Abschätzungen

$$|A| \le \frac{h(S)}{\rho(S_0)}, \qquad |A^{-1}| \le \frac{h(S_0)}{\rho(S)}$$

und

$$|\det A| = \frac{|S|}{|S_0|}, \qquad c(d)\rho(S)^d \;\le\; |\det A| \;\le\; c(d)h(S)^d$$

mit einer nur von der Dimension d abhängigen Konstante c.