Zentrum für Technomathematik

Prof. Dr. A. Schmidt
M.Sc. A. Narimanyan

Numerik partieller Differentialgleichungen

SS 2002 — Übung 4 — 02.05.2002
Abgabe: **Mittwoch, 08.05.2002**

Aufgabe 10 (4 Punkte)
Zeigen Sie die Konsistenzabschätzung auf einem nicht–äquidistanten Gitter:
Für $u \in C^4[x-h_l, x+h_r]$ gilt

$$\left| -u''(x) - \frac{2}{h_l+h_r}\left(\frac{u(x)-u(x+h_r)}{h_r} + \frac{u(x)-u(x-h_l)}{h_l}\right)\right| \;\leq\; C(h_l+h_r).$$

Falls für eine Konstante K gilt dass $h_l \leq h_r(1+Kh_r)$ und $h_r \leq h_l(1+Kh_l)$, so folgt

$$\left| -u''(x) - \frac{2}{h_l+h_r}\left(\frac{u(x)-u(x+h_r)}{h_r} + \frac{u(x)-u(x-h_l)}{h_l}\right)\right| \;\leq\; C(h_l^2+h_r^2).$$

Ein solches Gitter heißt *lokal äquidistant*.

Aufgabe 11 (2 Punkte)
Zeigen Sie: Für ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ist auf dem Sobolev-Raum $H_0^1(\Omega)$ die H^1-Halbnorm $|v|_{H^1} = (\int_\Omega |\nabla v|^2 dx)^{1/2}$ äquivalent zur H^1-Norm $\|v\|_{H^1} = (\int_\Omega v^2 + |\nabla v|^2 dx)^{1/2}$, d.h. es gibt Konstanten $0 < c < C < \infty$ so dass

$$c\,|v|_{H^1} \;\leq\; \|v\|_{H^1} \;\leq\; C\,|v|_{H^1} \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Aufgabe 12 (2 Punkte)
Beweisen Sie die *Young'sche Ungleichung*:
Für p, q mit $1 < p, q < \infty$ sowie $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und alle $a, b \geq 0$ gilt

$$ab \;\leq\; \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

Aufgabe 13 (4 Punkte)
Auf dem Raum $X = \{v \in C^1[0,1],\ v(0) = 0\}$ sei das Funktional

$$E(v) \;=\; \frac{1}{2}\int_0^1 p(x)v'(x)^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^1 q(x)v(x)^2 dx - \int_0^1 f(x)v(x)dx$$

gegeben mit $p, q, f \in C[0,1]$.

- Stellen Sie die schwache Form der Eulergleichung zu E auf, d.h. welche Gleichung gilt für eine Lösung $u \in X$ des Minimierungsproblems $E(u) = \inf_{v\in X} E(v)$?
- Stellen Sie die starke Form der Eulergleichung zu E auf (falls $u \in C^2(0,1)$ und $p \in C^1[0,1]$). Welche Randbedingung für u gilt in $x = 1$?