Zentrum für Technomathematik

Prof. Dr. A. Schmidt
M.Sc. A. Narimanyan

Numerik partieller Differentialgleichungen

SS 2002 — Übung 3 — 25.05.2002
Abgabe: 02.05.2002

Aufgabe 7 (4 Punkte)
Sei $Lu = -\Delta u + B_1 u_{x_1} + B_2 u_{x_2}$ mit $B_1, B_2 \geq 0$ sowie

$$L_h^- u = (-\Delta_h + B_1 D_{x_1}^- + B_2 D_{x_2}^-) u = \begin{bmatrix} & \frac{-1}{h^2} & \\ \frac{-1}{h^2} - \frac{B_1}{h} & \frac{4}{h^2} + \frac{B_1+B_2}{h} & \frac{-1}{h^2} \\ & \frac{-1}{h^2} - \frac{B_2}{h} & \end{bmatrix} u.$$

Zeigen Sie ein diskretes Maximumprinzip für L_h^- analog Satz 3.3 der Vorlesung.

Aufgabe 8 (4 Punkte)
Leiten Sie eine Differenzenapproximation für $u''(x)$ der Form $\sum_{k=-2}^{2} c_k\, u(x+kh)$ mit

$$\left| u''(x) - \sum_{k=-2}^{2} c_k\, u(x+kh) \right| \;\leq\; C\, h^4$$

her. Wie glatt muss u auf $[x-2h, x+2h]$ sein?

Aufgabe 9 (6 Punkte)
Sei $Lu = -\Delta u + cu$ mit $c \geq 0$ und u die Lösung des Dirichlet-Problems im beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} Lu &= f \qquad \text{in } \Omega, \\ u &= g \qquad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie eine Differenzenapproximation L_h zu L und zeigen eine Konsistenzabschätzung analog Lemma 3.8 der Vorlesung.

b) Zeigen Sie ein diskretes Maximum-Prinzip für L_h: Ist $L_h u_h \leq 0$ in Ω_h und nimmt u_h ein *positives* Maximum in $p_{ij} \in \mathring{\Omega}_h$ an, dann ist u_h konstant auf $\mathring{\Omega}_h \cup \Gamma_h^*$.

c) Zeigen Sie eine Fehlerabschätzung für $\|u - u_h\|$ analog Satz 3.10 der Vorlesung für den Fall $u \in C^4(\bar{\Omega})$ und $\Gamma_h \subset \partial\Omega$.