Zentrum für Technomathematik

Prof. Dr. A. Schmidt
M.Sc. A. Narimanyan

Numerik partieller Differentialgleichungen

SS 2002 — Übung 2 — 18.04.2002
Abgabe: 25.04.2002

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Zeigen Sie die folgenden Konsistenzabschätzungen:

a) Für $u \in C^3[x-h, x+h]$ ist

$$\left| u'(x) - \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} \right| \leq \frac{1}{6} h^2 \, \|u'''\|_\infty.$$

b) Für $u \in C^4[x-h, x+h]$ ist

$$\left| u''(x) - \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} \right| \leq \frac{1}{12} h^2 \, \|u^{(4)}\|_\infty.$$

c) Für $u \in C^{3,1}[x-h, x+h]$ ist

$$\left| u''(x) - \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} \right| \leq c\, h^2 \, \mathrm{Lip}(u''').$$

Dabei bezeichnet $\|v\|_\infty = \max\{|v(y)| : x-h \leq y \leq x+h\}$
und $\mathrm{Lip}(v) = \max\{\frac{|v(y)-v(z)|}{|y-z|} : y \neq z\}$ die Lipschitzkonstante von v.

Aufgabe 5 (4 Punkte)
Zeigen Sie die Konsistenzabschätzung für die gemischte Ableitung

$$\left| \frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{u(x_1+h, x_2+h) + u(x_1-h, x_2-h) - u(x_1+h, x_2-h) - u(x_1-h, x_2+h)}{4h^2} \right| \leq C\, h^2.$$

Wie glatt muss u sein (d.h. von welchen Ableitungen von u hängt die Konstante C ab?

Aufgabe 6 (4 Punkte)
Eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{M \times M}$ heißt L_0–*Matrix*, wenn $a_{ij} \leq 0$ für alle $i \neq j$. Sie heißt *inversmonoton*, wenn für beliebige $x, y \in \mathbb{R}^M$ aus $Ax \leq Ay$ folgt dass $x \leq y$. Eine inversmonotone L_0–Matrix heißt M–*Matrix*.

Zeigen Sie, dass die Systemmatrix $\underline{A}$ zur Finite Differenzen–Methode aus der Vorlesung eine M–Matrix ist.

Die Beziehungen $Ax \leq Ay$ sowie $x \leq y$ sind komponentenweise zu verstehen.