Zentrum für Technomathematik

Prof. Dr. A. Schmidt
M.Sc. A. Narimanyan

Numerik partieller Differentialgleichungen

SS 2002 — Übung 10 — 20.06.2002
Abgabe: Donnerstag, 27.06.2002

Aufgabe 29 (6 Punkte)
Zeigen Sie: Die Funktion $s : \mathbb{R}^d \times (0, \infty)$, definiert durch

$$s(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

ist eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$s_t - \Delta s = 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^d \times (0, \infty).$$

Außerdem gilt

$$\int_{\mathbb{R}^d} s(x,t)\,dx = 1 \qquad \text{und} \qquad \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^d \setminus B_\varepsilon(0)} s(x,t)\,dx = 0.$$

Aufgabe 30 (6 Punkte)
Zeigen Sie: Zu $u_0 \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ ist durch

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{4\pi t}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} u_0(y)\,dy & \text{für } t > 0, \\ u_0(x) & \text{für } t = 0 \end{cases}$$

eine Lösung $u \in C^0(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ mit $u_t, u_x, u_{xx} \in C^0(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ des Anfangswertproblems

$$u_t - u_{xx} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty), \qquad u(\cdot, 0) = u_0 \quad \text{auf } \mathbb{R}$$

gegeben. Verwenden Sie die Ergebnisse von Aufgabe 29.

Aufgabe 31 Parabolisches Maximumprinzip (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet und $T > 0$. Beweisen Sie, dass eine Lösung $u \in C^0(\bar{\Omega} \times [0, T])$ mit $u_t, u_{x_i}, u_{x_i x_j} \in C^0(\Omega \times (0, T))$ von

$$u_t - \Delta u = 0$$

ihr Maximum

$$M = \max_{\bar{\Omega} \times [0,T]} u$$

auf der Menge $(\bar{\Omega} \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0, T])$ annimmt.

Tip: Verwenden Sie die Hilfsfunktion $v(x,t) = u(x,t) - \varepsilon t$ mit $\varepsilon > 0$.