Zentrum für Technomathematik

Prof. Dr. A. Schmidt
M.Sc. A. Narimanyan

Numerik partieller Differentialgleichungen

SS 2002 — Übung 1 — 11.04.2002
Abgabe: 18.04.2002

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Bestimmen Sie den Typ (elliptisch, parabolisch, hyperbolisch) der folgenden Differentialoperatoren in zwei Raumkoordinaten, evtl. in Abhängigkeit von $x, u, \nabla u$.

a) $u_{x_1x_1} + \sin(x_1)u_{x_2x_2}$,

b) $u_{x_1x_2}$,

c) $\nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right)$,

d) $u_t - \Delta(\beta(u))$ mit $\beta(s) = \min(s,0) + \max(s-1,0)$.

Aufgabe 2 (Greensche Funktion in einer Raumdimension) (4 Punkte)
Sei $I = (0,1)$ das Einheitsintervall und $f \in C^0(\bar{I})$. Sei $u \in C^2(I) \cap C^0(\bar{I})$ mit

$$-u'' = f \quad \text{in } I, \qquad u(0) = u(1) = 0.$$

a) Zeigen Sie: Es gibt Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ so dass auf $\bar{I}$ gilt

$$u(x) \;=\; c_1 + c_2 x - \int_0^x \Big(\int_0^y f(z)\,dz \Big)\,dy \;=\; c_1 + c_2 x - \int_0^x (x-y) f(y)\,dy.$$

b) Leiten Sie Formeln für die Konstanten c_1 und c_2 her.

c) Zeigen Sie die Darstellungsformel

$$u(x) = \int_0^1 G(x,y)\, f(y)\, dy$$

mit der *Greenschen Funktion* $G : \bar{I} \times \bar{I} \to \mathbb{R}$,

$$G(x,y) = \begin{cases} y(1-x) & \text{falls } 0 \le y \le x, \\ x(1-y) & \text{falls } x \le y \le 1. \end{cases}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Zu $\alpha \in (0,2)$ sei $\Omega = \{(r\cos\phi, r\sin\phi) : 0 < r < 1,\ 0 < \phi < \alpha\pi\}$ das Kreissegment mit Öffnungswinkel $\alpha\pi$. Zeigen Sie:

a) Die Funktion $u(r\cos\phi, r\sin\phi) = r^{\frac{1}{\alpha}} \sin(\frac{\phi}{\alpha})$ löst das Randwertproblem

$$-\Delta u = 0 \ \text{ in } \Omega, \qquad u = r^{\frac{1}{\alpha}} \sin(\frac{\phi}{\alpha}) \ \text{ auf } \partial\Omega.$$

b) Für $\alpha > 1$ ist der Gradient ∇u auf Ω nicht beschränkt, d.h. $u \notin C^1(\bar{\Omega})$.

c) Für alle $\alpha \in (0,2)$ ist

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 < \infty.$$