Höhere Mathematik I, WS2013/14
M. Hortmann

Absolute Konvergenz von Reihen

Im Folgenden beschäftigen wir uns mit Reihen komplexer Zahlen.
Wir haben mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ den Grenzwert der durch $s_n := \sum_{i=1}^{n} a_i$ gegebenen Partialsummenfolge bezeichnet, aber auch die Folge der Partialsummen selbst, und diese Folge eine Reihe genannt.

Bei der Berechnung der Partialsummen legen wir uns auf eine bestimmte Reihenfolge der Summation fest. Wir benötigen ein Kriterium, unter welchen Umständen Konvergenz und Grenzwert einer Reihe nicht von dieser Reihenfolge abhängt.

Dieses Kriterium ist die ***absolute Konvergenz***:
Gilt für eine Reihe komplexer Zahlen $\sum_{n=1}^{\infty} |a_i| < \infty$, ist also die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, so ist sie insbesondere auch konvergent. Darüberhinaus folgt für jede bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, daß auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ konvergiert und für die Grenzwerte gilt $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$.

Mit anderen Worten: Ist eine Reihe absolut konvergent, so hängt ihr Grenzwert nicht von der Reihenfolge der Summation ab.

Es gibt aber auch andere „Umordnungen" im Kontext von Reihen:
Gehen wir aus von einer doppelt indizieren Summandenfolge: d.h. für jedes $i, j \in \mathbb{N}_0$ sei eine komplexe Zahl a_{ij} gegeben. Wir machen wieder eine „Absolutheitsvoraussetzung", z.B. sei die durch $t_n := \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} |a_{ij}|$ gegebene Folge beschränkt und daher (sie ist ja monoton wachsend) konvergent.

Dann konvergieren für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ die Reihen $\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}$. Setzen wir $b_i := \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}$, so konvergiert auch die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} c_i$, mit anderen Worten die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \right)$.
Außerdem konvergieren für jedes $j \in \mathbb{N}_0$ die Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_{ij}$. Setzen wir $c_j := \sum_{i=0}^{\infty} a_{ij}$, so konvergiert auch $\sum_{j=0}^{\infty} c_j$, also $\sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} \right)$, und es ist $\sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} \right)$.

In Anbetracht dieses Ergebnisses läßt man in die Klammern weg und schreibt
$\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_{ij}$.

Bei so einer „Doppelreihe" sind auch andere Umordnungen möglich, z.B. gilt auch
$\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=k} a_{ij} \right)$. Man bildet also die Folge der Partialsummen a_{00} , $a_{01} + a_{10}$, $a_{02} + a_{11} + a_{20}$, $a_{03} + a_{12} + a_{21} + a_{30}$, … und diese konvergiert mit demselben Grenzwert wie die obigen Doppelreihen.

Man könnte jetzt analog mit „Dreifachreihen" etc. weitermachen.

Ich will zunächst Beweisskizzen für die einzelnen oben gemachten Behauptungen liefern, und dann ein allgemeines „Framework" für diesen Kontext.

Zunächst also zum „Umordnungssatz"

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sei absolut konvergent und $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ [1] sei bijektiv.

Wir setzen $b_n := a_{\varphi(n)}$ und machen uns daran zu zeigen, daß $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$

Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben.

Es gibt dann wegen der absoluten Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} |a_n| < \epsilon/2$.

Die Urbildmenge $\varphi^{-1}(\mathbb{N}_{n_0}) = \{ n \in \mathbb{N} \mid \varphi(n) \in \mathbb{N}_{n_0} \}$ ist endlich und besitzt daher ein Maximum m_0, welches nicht kleiner sein kann als n_0. Wir haben also $\varphi^{-1}(\mathbb{N}_{n_0}) \subset \mathbb{N}_{m_0}$, also $\mathbb{N}_{n_0} \subset \varphi(\mathbb{N}_{m_0})$ daher kommen in der Summe $\sum_{n=1}^{m_0} b_n$ alle Summanden der Summe $\sum_{n=1}^{n_0} a_n$ vor. Dies ist entscheidend.

Ist $n \geq m_0$, so ist die Differenz $\sum_{i=1}^{n} b_i - \sum_{i=1}^{n_0} a_i$ ebenfalls eine Summe aus Summanden a_i, deren Indizes größer als n_0 sind. Wir können dies im Detail so schreiben:

$$\sum_{i=1}^{n} b_i - \sum_{i=1}^{n_0} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_{\varphi(i)} - \sum_{i=1}^{n_0} a_i = \sum_{j \in \varphi(\mathbb{N}_n)} a_j - \sum_{j=1}^{n_0} a_j = \sum_{\substack{j > n_0 \\ j \in \varphi(\mathbb{N}_n)}} a_j \quad (*)$$

Außerdem ist

$$\sum_{\substack{j > n_0 \\ j \in \varphi(\mathbb{N}_n)}} |a_j| \leqslant \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |a_n| \quad (**),$$ denn alle (positiven) Summanden links kommen auch rechts vor.

Für $n \geq m_0$ ist also

$$\left| \sum_{i=1}^{n} b_i - \sum_{n=1}^{\infty} a_i \right| =$$

$$\left| \sum_{i=1}^{n} b_i - \sum_{i=1}^{n_0} a_i - \sum_{i=n_0+1}^{\infty} a_i \right| \leq \left| \sum_{i=1}^{n} b_i - \sum_{i=1}^{n_0} a_i \right| + \left| \sum_{i=n_0+1}^{\infty} a_i \right| \leq$$

$$\left| \sum_{\substack{j > n_0 \\ j \in \varphi(\mathbb{N}_n)}} a_j \right| + \left| \sum_{j=n_0+1}^{\infty} a_j \right| \leqslant \sum_{\substack{j > n_0 \\ j \in \varphi(\mathbb{N}_n)}} |a_j| + \sum_{i=n_0+1}^{\infty} |a_i| \leqslant \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |a_n| + \sum_{i=n_0+1}^{\infty} |a_i| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

Dabei gilt das letzte Ungleichheitszeichen in der mittleren Zeile wegen (*), das vorletzte in der dritten Zeile wegen (**).

Wir haben also zu $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ produziert, so daß für alle $n \geq n_0$ gilt:

$\left| \sum_{i=1}^{n} b_i - \sum_{n=1}^{\infty} a_i \right| < \epsilon$; damit konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ und für den Grenzwert gilt: $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Fortsetzung folgt.

---

1 φ nimmt eine Vertauschung der Indizes vor, ist also eine Permutation, nicht wie sonst auf $\mathbb{N}_n$, sondern auf ganz $\mathbb{N}$.