Weitere mögliche Klausurfragen/aufgaben zum aktuellen Stoff

1. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Geben Sie die Definition des Begriffs „Skalarprodukt auf V".
2. Wann heißt eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V Orthonormalbasis?
3. Geben Sie eine Definition des Begriffs „normierter Vektorraum".
4. Geben Sie eine Definition des Begriffs „Banachraum".
5. Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt. Wie definiert man die zugehörige Norm?
6. Wie lautet die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung ?
7. Beweisen Sie mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung die Dreieckungleichung für die durch das Skalarprodukt definierte Norm.
8. Sei A eine reelle nxn-Matrix. Wann heißt A orthogonal?
9. Zeigen Sie: Ist A orthogonal, so ist det(A)=±1 .
10. Zeigen Sie: Ist $A \in M_{n \times n}$ eine beliebige Matrix und gilt $x, y \in \mathbb{R}^n$, so gilt $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^t y \rangle$.
11. Zeigen Sie: Ist $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ orthogonal und sind $x, y \in \mathbb{R}^n$, so gilt $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$.
12. Zeigen Sie: Ist $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ orthogonal und ist $x \in \mathbb{R}^n$, so gilt $\|Ax\| = \|x\|$.
13. Zeigen Sie: Sind $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ orthogonal, $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und gilt $Ax = \lambda x$, so folgt: $\lambda = \pm 1$.
14. Betrachten Sie die Basis $v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Wenden die das Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsverfahren auf diese Basis an, um eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ zu erhalten, die den Vektor $\begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$ enthält.
15. Zeigen Sie: das Produkt zweier orthogonaler Matrizen ist orthogonal.
16. Zeigen Sie: die Inverse einer orthogonalen Matrix ist orthogonal.
17. Sei $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß die Matrix $\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$ eine Rotationsmatrix ist.
18. Seien $x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, y := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Man setze $z := x \times y := \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$ (Vektorprodukt) und zeige:

a) $z = x \times y$ steht senkrecht sowohl auf x wie auf y.
b)Sind x, y Einheitsvektoren, d.h. $\|x\| = \|y\| = 1$, so gilt $\|z\|^2 + \langle x, y \rangle^2 = 1$.
c) Sei A die Matrix mit den Spaltenvektoren x, y, z so ist det(A)≥0.

Bemerkungen: das Vektorprodukt gibt es so nur im $\mathbb{R}^3$, nicht im $\mathbb{R}^n$ für $n \neq 3$.
Da für Einheitsvektoren x und y das Skalarprodukt $\langle x, y \rangle$ gleich dem Cosinus des Winkels zwischen x und y ist, sieht man wg. $\cos^2 + \sin^2 = 1$ aus b), daß die Länge von $z = x \times y$ gleich dem Sinus des Winkels zwischen x und y ist.
Stehen die Einheitsvektoren x, y aufeinander senkrecht und ist daher $\langle x, y \rangle = 0$, so ist wegen b) $z = x \times y$ auch ein Einheitsvektor und daher die Matrix in 18c) orthogonal. Wegen det(A)≥0 ist sie sogar eine Rotationsmatrix.

Die Rechnerei in Aufg. 18 ist übrigens weniger aufwändig als man zunächst denkt.
Tip: Berücksichtigen Sie in 18b), daß man statt $\|x\| = \|y\| = 1$ einfacher $\|x\|^2 = \|y\|^2 = 1$ schreiben sollte, also $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ und $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$.

19. Seien $v_1, \ldots, v_n$ vom Nullvektor verschiedene Vektoren in einem Vektorraum mit Skalarprodukt. Man zeige: Wenn diese Vektoren paarweise aufeinander senkrecht stehen, d.h. wenn $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ für $1 \leq i < j \leq n$, so sind sie linear unabhängig.