Mögliche Klausurfragen zum aktuellen Stoff

1. Sei $A := \begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 6 & 9 \\ 8 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_{11})$

Die Matrix A definiert via $x \mapsto Ax$ eine lineare Abbildung $A : \mathbb{Z}_{11}^4 \to \mathbb{Z}_{11}^3$.

a) Wie ist Ker(A) definiert?
b) Wie ist Im(A) definiert?
c) Können Sie ohne jede Rechnung ein Erzeugendensystem von Im(A) hinschreiben?
d) Wie ist der Rang von A definiert?
e) Berechnen Sie die Gaußsche Normalform von A.
f) Berechnen Sie den Rang von A.
g) Was ist die Dimension des Kerns von A?
h) Geben Sie eine Basis des Kerns von A an.
i) Was ist die Dimension von Im(A)
j) Geben Sie eine Basis von Im(A) an.
k) Können Sie ohne Rechnung die Werte der vier 3x3 Unterdeterminanten von A angeben?

2. Sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen K-Vektorräumen. Zeigen Sie:
a) Ist φ injektiv, so ist ker $(\varphi) = \{0\}$.
b) Ist ker $(\varphi) = \{0\}$, so ist φ injektiv .

3. Sei $A \in M_{n\times n}(K)$.
a) Wie ist det(A) definiert?
b) Wie ist die Kofaktormatrix von A definiert?
c) Welche Formel gilt für das Produkt von A mit der Kofaktormatrix?
d) Es gelte $A \cdot A^t = E$. Welche Werte sind dann für det(A) möglich?
e) Es gelte $A^2 = E$. Welche Werte sind dann für det(A) möglich?
f) Es sei $K = \mathbb{C}$ und $A^3 = E$. Welche Werte sind dann für det(A) möglich?
g) Es sei A^7 die Nullmatrix. Welche Werte sind dann für det(A) möglich?

4. Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 & 5 \\ 4 & 6 & 0 & 7 \\ 9 & 5 & 2 & 10 \\ 0 & 9 & 5 & 5 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{Z}_{11})$.

a) Berechnen Sie det(A).
b) Benutzen Sie das Ergebnis von a), um den Rang von A anzugeben.
Definieren Sie $B \in M_{3\times 3}(\mathbb{Z}_{11})$, indem Sie in A die letzte Spalte und die letzte Zeile streichen.
c) Berechnen Sie die Kofaktormatrix C von B .
d) Berechnen Sie die Determinante von B durch „Entwicklung nach der ersten Zeile".

5. a) Wieviele Elemente besitzt ein zweidimensionaler Unterraum von $\mathbb{Z}_3^3$?

b) Sei $U := \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$. Schreiben Sie alle Elemente dieses Unterraums von $\mathbb{Z}_3^3$ hin.

c) Sei $U := \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$. Schreiben Sie alle Elemente dieses Unterraums von $\mathbb{Z}_3^3$ hin.