Klausurfragen

Natürlich wird es in der Klausur am 6.2.14, die 3 Stunden dauert, viel weniger Fragen geben; es wird aber auch Stoff vorkommen, der erst in den nächsten Wochen behandelt wird. Wie Sie unten sehen, geht es wesentlich um Definitionen, aber auch um einfache Sachverhalte und Methodenwissen. Die folgende Sammlung deckt in etwa den bisher behandelten Lehrstoff ab.

Was ist eine Tautologie?

Begründen Sie, warum $((A \vee B) \vee (C \vee D)) \vee (\neg A)$ eine Tautologie ist. (Begründung ohne Wahrheitstafel)

Geben Sie eine logische Formel mit den 5 Aussagenvariablen A,B,C,D,E an, die genau dann wahr ist, wenn A,B,C,E wahr sind und D falsch ist. (Ohne weitere Begründung)

Ergänzen Sie zu einer Identität $\overline{M \cup N} =$

Geben Sie die Definition des Begriffs „Teilmenge".

Sei M eine Menge: Warum ist die Aussage $\forall x \in \emptyset \rightarrow x \in M$ wahr?

Geben Sie die Definition des Begriffs Potenzmenge.

Geben Sie die Potenzmenge der Menge $\{1,2,3\}$ an.

Wieviele Abbildungen gibt es von einer vierelementigen Menge in eine dreielementige Menge? Begründen Sie Ihre Antwort.

Sei $f: M \rightarrow N$ eine Abbildung. Wann heißt f injektiv, wann surjektiv? Wann existiert die inverse Abbildung $f^{-1}: N \rightarrow M$?

Sei $f: M \rightarrow N$ eine Abbildung, und es sei $U \subset M$ und $V \subset N$. Wie ist die Bildmenge von U definiert (d.h. die Menge $f(U)$) und wie die Urbildmenge von V (d.h. die Menge $f^{-1}(V)$)?

Berechnen Sie die Verknüpfung der beiden Permutationen (3 2 5 1 4) und (4 1 3 5 2), d.h. das Produkt (3 2 5 1 4) circ (4 1 3 5 2).

Geben Sie eine Definition des Begriffs „Gruppe".

Wann heißt eine Gruppe „abelsch"?

Geben Sie ein Beispiel für eine nicht-abelsche Gruppe.

In jeder Gruppe G gilt für Elemente $a, b \in G$ die Formel $(a \cdot b)^{-1} = \ldots$.
Beweisen Sie diese Formel.

Nennen Sie die Peano-Axiome für die natürlichen Zahlen.

Geben Sie die rekursive Definition der Multiplikation natürlicher Zahlen an.

Wann ist ein Ring ein Körper?

Was ist ein archimedisch geordneter Körper?

Definieren Sie den Begriff: „Metrischer Raum".

Was ist eine Cauchyfolge in einem metrischen Raum?

Was ist ein vollständiger metrischer Raum?

Seien (M_1, d_1) und (M_2, d_2) metrische Räume. Zeigen Sie: durch $d\left((x_1, x_2), (y_1, y_2)\right) := d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$ wird auf $M := M_1 \times M_2$ eine Metrik definiert.

Wie lautet die Bernoullische Ungleichung?
Zeigen Sie mit Hilfe der Bernoullischen Ungleichung, daß für $q \in \mathbb{R}$, $0 < q < 1$ gilt: $q^n \leqslant \frac{1}{n}$.
Zeigen Sie durch Überprüfen der Konvergenzdefinition, daß der Grenzwert der durch $x_n := 1$ gegebenen Folge 1 ist.

Zeigen Sie: Eine konvergente Folge in (x_n) in $\mathbb{R}$ ist nach oben beschränkt, d.h. es gibt ein $A \in \mathbb{R}$ so daß $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leqslant A$.

Sei (x_n) eine konvergente Folge reeller Zahlen. Sei $a \in \mathbb{R}$ eine obere Schranke für die Folge, d.h. es gelte $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leqslant a$. Man zeige, daß $\lim\limits_{n \to \infty} x_n \leqslant a$.

Wie lauten die „Grenzwertsätze" für konvergente Folgen in $\mathbb{C}$?

Wie ist „Konvergenz einer Reihe" definiert?

Berechnen Sie den Grenzwert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$
Berechnen Sie den Wert der Summe $\sum\limits_{n=3}^{100} \left(\frac{1}{10}\right)^n$

Zeigen Sie, daß die harmonische Reihe nicht konvergiert.

Seien $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{m=0}^{\infty} b_m$. Wie lautet die Cauchy-Produkt-Formel für $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum\limits_{m=0}^{\infty} b_m\right)$?

Wie lautet das Majorantenkriterium für absolut konvergente Reihen?
Wie lautet das Quotientenkriterium für absolut konvergente Reihen?

Zeigen Sie mit Hilfe des Quotientenkriteriums, daß die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ für $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$ absolut konvergiert.

Wie lautet die Fundamentalgleichung für die Exponentialfunktion?

Wie definiert man Sinus und Cosinus mit Hilfe der Exponentialfunktion?

Zeigen Sie für $z \in \mathbb{C}$: $\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z)$

Wie ist die Zahl e definiert?

Geben Sie eine Definition der Zahl π !

Warum ist $\exp(3) = e^3$?

Warum besitzt die Exponentialfunktion $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ keine Nullstelle?

Warum gilt für jedes $t \in \mathbb{R}: |\exp(it)| = 1$?

Wie sehen die Potenzreihendarstellungen für Sinus und Cosinus aus?

Wie lauten die Additionsformeln für Sinus und Cosinus?

Wann heißt eine Teilmenge eines metrischen Raums offen?

Wann heißt eine Teilmenge eines metrischen Raums zusammenhängend?

Geben Sie die Definition einer „offenen Kugel“ $U_\epsilon(x_0)$ in einem metrischen Raum.

Warum ist eine offene Kugel in einem metrischen Raum eine offene Menge?

Eine abgeschlossene Menge ist einem Metrischen Raum M ist definitionsgemäß das Komplement einer offenen Menge. Zeigen Sie: Eine abgeschlossene Kugel $B_\epsilon(x_0) := \{x \in M \mid d(x, x_0) \le \epsilon\}$ ist abgeschlossen, d.h. die Menge $M \setminus B_\epsilon(x_0)$ ist offen.

Für welche Teilmengen $M \subset \mathbb{R}^n$ gilt die Aussage: jede stetige Funktion $f: M \to N$ besitzt ein Maximum?

Zeigen Sie, daß die durch $f(z) := \begin{cases} z & \text{für} \quad z \neq 0 \\ 1 & \text{für} \quad z = 0 \end{cases}$ gegebene Funktion $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ im Punkt $z_0 = 0$ unstetig ist.

Wie lautet das Folgenkriterium für Stetigkeit?

Was bedeuten die Schreibweisen: $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = a$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$?

Ziehen Sie die Konjunktion $\neg$ in der Aussage $\neg(\forall A \in \mathbb{R} \, \exists B \in \mathbb{R} \, \forall x \in \mathbb{R}: x \ge B \to f(x) \ge A)$ bis hinter den Doppelpunkt durch, und ersetzen Sie die dabei entstehende Verneinung der Implikation durch einen Ausdruck, der die Konjunktion $\to$ nicht mehr enthält.

Was ist der Unterschied zwischen einer punktweise konvergenten und einer gleichmäßig konvergenten Funktionenfolge?

Unter welcher Bedingung führt eine Folge stetiger Funktionen zu einer stetigen Grenzfunktion?

Was ist der Konvergenzradius einer Potenzreihe?