Beispiel für die Durchführung des Gauß-Algorithmus

Wir gehen aus von $K=\mathbb{Z}_5$ und dem Gleichungssystem $Ax=b$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir führen die folgenden elementaren Zeilenoperationen und Spaltenvertauschungen durch, um zur Gaußschen Normalform zu kommen. Dabei schleppen wir in der letzten Spalte den Vektor b mit, der bei Spaltenvertauschungen unberührt bleibt:

2	4	0	1	4	3	
2	4	4	2	0	1	
2	4	1	0	4	1	
3	1	1	3	2	1	
						multipliziere jede Zeile mit dem Inversen ihres ersten Elements
1	2	0	3	2	4	
1	2	2	1	0	3	
1	2	3	0	2	3	
1	2	2	1	4	2	
						subtrahiere die erste Zeile von der 2.,3.,4. Zeile
1	2	0	3	2	4	
0	0	2	3	3	4	
0	0	3	2	0	4	
0	0	2	3	2	3	
						jetzt ist die erste Spaltenvertauschung fällig: z.B. 2te Spalte mit 4ter Spalte
1	3	0	2	2	4	
0	3	2	0	3	4	
0	2	3	0	0	4	
0	3	2	0	2	3	
						erzwinge in der zweiten Zeile, daß das zweite Element 1 wird
1	3	0	2	2	4	
0	1	4	0	1	3	

0	2	3	0	0	4	
0	3	2	0	2	3	
						räume die zweite Spalte auf
1	0	3	2	4	0	
0	1	4	0	1	3	
0	0	0	0	3	3	
0	0	0	0	4	4	
						vertausche die dritte und fünfte Spalte
1	0	4	2	3	0	
0	1	1	0	4	3	
0	0	3	0	0	3	
0	0	4	0	0	4	
						räume die dritte Spalte auf
1	0	0	2	3	1	
0	1	0	0	4	2	
0	0	1	0	0	1	
0	0	0	0	0	0	
						die gewünschte Gauß-Normalform ist erreicht, und das System ist lösbar.

Der Rang der Matrix A ist also 3.

Bei der Bestimmung einer Basis des Kerns von A lesen wir aus dem letzten Kästchen die Vektoren $\begin{pmatrix}-2\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-3\\-4\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ ab.

Um von diesen zu einer Basis des Kerns von A zu kommen, müssen wir die vorgenommenen Vertauschungen in umgekehrter Reihenfolge an den Komponenten dieser Vektoren durchführen, also erst die dritte und fünfte Komponente und dann die zweite und vierte dieser Vektoren vertauschen. (Dabei kommt es in diesem Beispiel zufällig auf die Reihenfolge nicht an.) Wir erhalten also als Basis des Kerns von A

$\begin{pmatrix}3\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$, und man rechnet leicht nach, daß diese Vektoren wirklich im Kern von A liegen.

Zur Lösung des inhomogenen Systems lesen wir aus der letzten Spalte der Tabelle den Vektor

$\tilde{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tilde{b}_1\\0\end{pmatrix}$ ab. Es ist $\tilde{b}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$. Aus $\tilde{b}_1$ formen wir durch Anhängen von Nullen $\tilde{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ - wir brauchen ja einen 5-zeiligen Lösungsvektor - und vertauschen in $\tilde{x}$ ebenfalls die dritte und fünfte und dann die zweite und vierte Komponente, so daß wir am Schluß als eine Lösung des inhomogenen Systems den Vektor $x=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\\1\end{pmatrix}$ erhalten. Daß dieser tatsächlich eine Lösung von $Ax=b$ darstellt, rechnet man leicht nach.

Alle weiteren Lösungen des Gleichungssystems erhalten wir, indem wir eine beliebige Linearkombination der Basiselemente des Kerns zu dieser speziellen Lösung addieren.