Höhere Mathematik I, WS2013/14
M. Hortmann

Blatt 7

c) Freiwillige Sonderaufgabe:
Wir wissen: Sind zwei Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent, und setzt man für $k \in \mathbb{N}_0$
$c_k := \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = \sum_{i+j=k} a_i b_j$, so ist auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ absolut konvergent und man hat die
Cauchy-Produkt-Formel: $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i+j=k} a_i b_j$.

Man multipliziere dementsprechend die in b) gefundenen Reihen mit sich selbst und zeige, daß die Differenz der beiden Produkte 1 ist [1].

Wir gehen aus von $\cosh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ und $\sinh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ und erhalten zunächst

$$\cosh^2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i+j=n} \frac{z^{2i} z^{2j}}{(2i)!(2j)!} = \ .$$

An dieser Stelle ging es im Plenum nicht weiter. Jedoch erwähnt Herr Kaya ganz am Schluß noch, daß man eine Umformung mit Binomialkoeffizienten finden müsse, und da war es (mir) klar. Jedenfalls hätte jeder sofort sehen müssen, daß sich im Zähler die z-Potenzen zusammenfassen lassen. Der Rest geht dann fast zwangsläufig:

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i+j=n} \frac{z^{2(i+j)}}{(2i)!(2j)!} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} \sum_{i+j=n} \frac{1}{(2i)!(2j)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \sum_{i+j=n} \frac{(2n)!}{(2i)!(2j)!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{2i}$$

Dies läßt eine ähnliche Gleichung für $\sinh^2$ erwarten und die Reduzierung des Problems auf eine einfache Gleichung für Binomialkoeffizienten.

$$\sinh^2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i+j=n} \frac{z^{2i+1} z^{2j+1}}{(2i+1)!(2j+1)!} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i+j=n} \frac{z^{2(i+j+1)}}{(2i+1)!(2j+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2(n+1)} \sum_{i+j=n} \frac{1}{(2i+1)!(2j+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2(n+1)}}{(2(n+1))!} \sum_{i+j=n} \frac{(2(n+1))!}{(2i+1)!(2j+1)!} =$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{2n}{2i+1}$$

Wenn $\sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{2i} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{2n}{2i+1}$, dann heben sich in der Differenz $\cosh^2(z) - \sinh^2(z)$ alle obigen Reihenterme weg, und man hat dann als Differenz den Wert 1. Die Gleichung $\sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{2i} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{2n}{2i+1}$ ergibt sich aber sofort aus $\sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{2i} - \sum_{i=0}^{n-1} \binom{2n}{2i+1} = \sum_{j=0}^{2n} (-1)^i \binom{2n}{j} = (1+(-1))^{2n} = 0^{2n} = 0$.

---

1 Man soll also die Identität $(\cosh(z))^2 - (\sinh(z))^2 = 1$ anhand der Reihendarstellung nachweisen.)