Höhere Mathematik I, WS2013/14
M. Hortmann

Blatt 10

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Lösungen

Namen					**Gruppennr.**	**Tutor**
1a	b	2	3	4	**Summe**	**bearbeitet**
1	1	1	1	1	4 Punkte=100%	

Aufgabe 1:
Mit den folgenden Pari-Befehlen habe ich mir eine 5x6-Matrix mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}_{11}$ in Gaußscher Normalform beschafft, welche den Rang 3 besitzt.

```
A=matid(3)
A=mattranspose(concat(A,matrix(3,3,i,j,random(10)+1)))
A=mattranspose(concat(A,matrix(6,2)))
A=mod(A,11)
```

Anschließend habe ich diese Matrix mit einer zufälligen invertierbaren Matrix in $M_{5\times 5}(\mathbb{Z}_{11})$ von links multipliziert:

```
B=matrix(5,5,i,j,Mod(random(10)+1,11))
```

Den Ausdruck `random(10)+1` benutze ich, um zufällige Zahlen zwischen 1 und 10 zu erhalten. `Random(11)` hätte zufällige Zahlen zwischen 0 und 10 produziert; ich wollte aber, um alles etwas komplizierter zu machen, Nullen vermeiden.
Natürlich hätte die so konstruierte Matrix B zufällig auch nicht invertierbar sein können. Jedoch ergab sich 5 als Resultat des Befehls `matrank(B)`. Mein B war also invertierbar, und die Matrix `B*A` wird dann eine zufällige Matrix in $M_{5\times 6}(\mathbb{Z}_{11})$ vom Rang 3.

Diese Matrix läßt sich leichter lesen mit dem Befehl `lift(B*A)`.
Nehmen wir nun das Ergebnis dieser Rechnung

$$A := \begin{pmatrix} 9 & 3 & 8 & 10 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 5 & 6 & 5 & 6 \\ 5 & 8 & 1 & 5 & 6 & 3 \\ 4 & 8 & 6 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 2 & 5 \end{pmatrix} \in M_{5\times 6}(\mathbb{Z}_{11})$$

Nach Konstruktion ist dies eine zufällige Matrix in $M_{5\times 6}(\mathbb{Z}_{11})$ vom Rang 3.

Schließlich generiere ich noch einen zufälligen Vektor $x_0 \in \mathbb{Z}_{11}^6$ mit dem Befehl
`x0=vector(6,i,Mod(random(10)+1,11))~`

Die Tilde am Ende sorgt dafür, daß sich ein Spaltenvektor ergibt. Anderenfalls ließe sich das Produkt $A\,x_0$ nicht bilden. Als Ergebnis erhalte ich $A\,x_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 10 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} =: b \in \mathbb{Z}_{11}^5$.

Daher weiß ich daß das Gleichungssystem $Ax=b$ lösbar ist und kann die Aufgabe stellen:

Benutzen Sie den Gaußschen Algorithmus, um
a) eine spezielle Lösung des Gleichungssystems $Ax=b$ und
b) eine Basis des Kerns von A zu finden[1].

Aufgabe 2

Gegeben seien zwei zweidimensionale Untervektorräume U,V des $\mathbb{R}^3$, gegeben durch

$U := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid 2x+3y+5z=0 \right\}$ und $V := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle$. Man bestimme eine Basis von $U \cap V$.

Aufgabe 3

Man definiert das Skalarprodukt zweier Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ durch $\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, also durch die Summe der Produkte der Komponenten. Geometrisch bedeutet $\langle x, y \rangle = 0$, daß die beiden Vektoren aufeinander senkrecht stehen.

Um einen Nicht-Nullvektor zu konstruieren, der auf $x := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ senkrecht steht, muß man also einen Vektor $0 \neq y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ im Kern der Matrix (1 2 3) angeben. Alsdann läßt sich ein weiterer Vektor $z \neq 0$ im Kern der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$ finden, so daß man am Ende drei paarweise aufeinander senkrecht stehende Vektoren hat, deren erster der obige Vektor x ist.

1 Hätte die Matrix den Rang 5 - mehr geht nicht bei einer 5x6 Matrix – so wäre die Rechnung ziemlich aufwändig. Da sie aber den Rang 3 hat, geht es relativ schnell. Die Aufgabe selbst hat mit Pari gar nichts mehr zu tun.

Finden Sie also $y, z \in \mathbb{R}^3$ nach obigem Konstruktionsschema und sorgen Sie gleichzeitig dafür, daß beide Vektoren y,z , wie auch schon x, nur ganzzahlige Komponenten besitzen.

Aufgabe 4

Berechnen Sie die Determinante der Matrix $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 & 6 \\ 6 & 3 & 5 & 9 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 5 & 3 \\ 9 & 2 & 8 & 6 & 8 \\ 2 & 3 & 5 & 3 & 7 \end{pmatrix} \in M_{5\times5}(\mathbb{Z}_{11})$, indem Sie sie durch geeignete elementare Umformungen auf obere Dreiecksgestalt bringen.