Höhere Mathematik I, WS2013/14
M. Hortmann

Blatt 9

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Lösungen

Namen							**Gruppennr.**	**Tutor**
1	2	3	4a	b	5a	b	**Summe**	**bearbeitet**
1	1	1	1	1	1	1	5 Punkte=100%	

Aufgabe1: Gegeben sei die Matrix $A=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&0\\1&0&0&1\\0&1&0&1\end{pmatrix}\in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$. Berechnen Sie die Inverse!

Aufgabe 2: Schreiben Sie alle Untervektorräume des $\mathbb{Z}_2$ -Vektorraums $\mathbb{Z}_2^2$ hin [1].

Aufgabe 3: Finden Sie ein vom Nullvektor verschiedenes Element im Kern des durch $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}x+y+z\\2x+3y+4z\end{pmatrix}$ gegebenen Vektorraumhomomorphismus' $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 4 (Elementargeometrie in einem Vektorraum)
Eine Gerade in einem K-Vektorraum V ist gegeben durch einen Punkt $P\in V$ und einen vom Nullvektor verschiedenen „Richtungsvektor" $v\in V$ als Menge $\{P+\lambda v \mid \lambda\in K\}$. Eine Gerade ist also definiert als Menge von Punkten. Der Punkt P liegt auf jeder der Geraden $\{P+\lambda v \mid \lambda\in K\}$.

Sind $P_1, P_2\in V$ verschiedene Punkte, so liegen diese beiden Punkte offenbar auf der Geraden $\{P_1+\lambda(P_2-P_1) \mid \lambda\in K\}$. Durch zwei Punkte gibt es also mindestens eine Gerade.

a) Zeigen Sie: Liegen P_1, P_2 auf zwei Geraden *G*, *H* und ist $P_1\neq P_2$, so folgt *H*=*G* [2].
b) Zeigen Sie: Sind *H*, *L* zwei verschiedene Geraden in *V*, so schneiden sie sich in höchstens einem Punkt von V [3].

1 Jeder dieser Untervektorräume ist eine endliche Menge.
2 D.h. Sie sollen zeigen, daß jedes Element der Menge *G* auch Element von *H* sein muß und umgekehrt.
3 Es ist also zu zeigen: Ist $H\neq L$ und $P_1, P_2\in H\cap L$, so ist $P_1=P_2$

Aufgabe 5:

Betrachten Sie die Einheitssphäre S^2 im $\mathbb{R}^3$. Sei $N=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ der „Nordpol" dieser Sphäre. Ist $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$, so schneidet die Gerade durch den Nordpol und den Punkt $\begin{pmatrix}u\\v\\0\end{pmatrix}$ die Sphäre in einem eindeutig bestimmten weiteren Punkt $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

Berechnen Sie

a) die durch $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ gegebene Abbildung $f:\mathbb{R}^2 \to S^2\setminus\{N\}$, sowie

b) ihre Inverse [4].

(Stereographische Projektion)

4 Sie sollen x,y,z durch u,v ausdrücken und umgekehrt. Beachten Sie, daß $x^2+y^2+z^2=1$.