Höhere Mathematik I, WS2013/14
M. Hortmann

Blatt 7

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Lösungen

Namen						**Gruppennr.**	**Tutor**
1	2a	b	3a	b	4	**Summe**	**bearbeitet**
1	1	1	1	1	1	4 Punkte=100%	

Aufgabe 1

(x_n) sei eine konvergente, also nach oben beschränkte Folge reeller Zahlen. Sei $a \in \mathbb{R}$ eine obere Schranke für die Folge, d.h. es gelte $\forall n \in \mathbb{N}: x_n \leqslant a$. Man zeige, daß $\lim_{n\to\infty} x_n \leqslant a$.

Aufgabe 2

Für $z \in \mathbb{C}$ setze man $\cosh z := (\exp(z)+\exp(-z))/2$ und $\sinh(z) := (\exp(z)-\exp(-z))/2$ [1].

a) Man benutze die Fundamentalgleichung $\exp(z+w)=\exp(z)\cdot\exp(w)$ und die Gleichung $\exp(0)=1$, um für beliebige $z\in\mathbb{C}$ zu zeigen: $(\cosh(z))^2-(\sinh(z))^2=1$.

b) Ausgehend von der Reihendarstellung für exp(z) berechne man Reihendarstellungen für cosh(z) und sinh(z).

c) Freiwillige Sonderaufgabe:
Wir wissen: Sind zwei Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent, und setzt man für $k \in \mathbb{N}_0$ $c_k := \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = \sum_{i+j=k} a_i b_j$, so ist auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ absolut konvergent und man hat die Cauchy-Produkt-Formel: $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i+j=k} a_i b_j$.

Man multipliziere dementsprechend die in b) gefundenen Reihen mit sich selbst und zeige, daß die Differenz der beiden Produkte 1 ist [2].

1 Dies sind die „Hyperbelfunktionen“ Cosinus- und Sinus-Hyperbolicus
2 Man soll also die Identität $(\cosh(z))^2-(\sinh(z))^2=1$ anhand der Reihendarstellung nachweisen.)

Aufgabe 3

Offenbar gilt $\forall\, z \in \mathbb{C}:\ \sin(z) = z \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}$

a) Man zeige, daß für für $x \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq x \leq 1/2$ für die Partialsummen der obigen Reihe gilt:
$0 \leq \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i+1)!} \leq 1$

b) Man folgere daraus, daß für $x \in \mathbb{R}$ und $0 \leq x \leq 1/2$ gilt: $0 \leq \sin(x) \leq x$

Aufgabe 4

Die „Euler-Zahl" e wird definiert durch $e := \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.
Wir werden später lernen, wie viele Summanden der Reihe man berechnen muß, um eine vorgegebene Genauigkeit zu erreichen.

Berechnen Sie eine exakte Darstellung von $\sum_{n=0}^{9} \frac{z^n}{n!}$ für z=1, ausgehend folgender Rechnung

$$\left(\left(\left(\left(\left(\left(\left(\left(\left(\frac{z}{9}+1\right)\cdot\frac{z}{8}+1\right)\cdot\frac{z}{7}+1\right)\cdot\frac{z}{6}+1\right)\cdot\frac{z}{5}+1\right)\cdot\frac{z}{4}+1\right)\cdot\frac{z}{3}+1\right)\cdot\frac{z}{2}+1\right)\cdot z+1\right)$$ [3].

3 Die Rechnung, ob per Hand oder per Computerprogramm sollte natürlich vollständig dokumentiert sein. Rechnen Sie nach Möglichkeit mit gekürzten Brüchen.