Höhere Mathematik I, WS2013/14
M. Hortmann

Blatt 6

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Lösungen

Namen						Gruppennr.	Tutor
1a	b	2	3a	b	4	**Summe**	**bearbeitet**
1	1	1	1	1	1	4 Punkte=100%	

Aufgabe 1

Sei d eine Metrik auf der Menge M. Setzen Sie für $x,y\in M$ $\quad \overline{d}(x,y):=\dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$.

a) Zeigen Sie, daß $\overline{d}$ ebenfalls eine Metrik auf M ist[1].

b) Zeigen Sie: Ist eine Folge (x_n) in M konvergent mit Grenzwert $a\in M$ bezüglich der Metrik d, so ist sie auch konvergent mit demselben Grenzwert bezüglich der Metrik $\overline{d}$.

c) Freiwillige Sonderaufgabe: Zeigen Sie: Ist eine Folge (x_n) in M konvergent mit Grenzwert $a\in M$ bezüglich der Metrik $\overline{d}$, so ist sie auch konvergent mit demselben Grenzwert bezüglich der Metrik d .[2]

Aufgabe 2

Die Folge (x_n) in $\mathbb{R}$ sei durch $x_n:=\dfrac{17n^2+3n+4}{n^3+n+1}$ definiert. Benutzen Sie die Grenzwertsätze, um zu zeigen, daß diese Folge konvergiert und berechnen Sie dabei gleichzeitig den Grenzwert.

1 Einzig der Nachweis der Dreiecksungleichung ist nicht trivial.
2 b) ist recht einfach, c) durchaus schwieriger. Grundsätzlich sollten Sie in Ihren Abschätzungen benutzen, daß sich ein Bruch mit positivem Zähler und Nenner vergrößert, wenn Sie den Nenner verkleinern oder den Zähler vergrößern, bzw. daß ein Bruch sich verkleinert, wenn Sie den Zähler verkleinern oder den Nenner vergrößern.

Aufgabe 3

Man betrachte die durch $x_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ gegebene Folge positiver reeller Zahlen.
Rechnet man mit Pari ein paar Werte aus, so sieht man, daß sie monoton steigt.

Offenbar ist die Ungleichung $x_n \leqslant x_{n+1}$ äquivalent zu $1 \leqslant \frac{x_{n+1}}{x_n}$ und dies wieder äquivalent zu

$$1 \leqslant \left(\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)^{n+1} \left(1+\frac{1}{n}\right) .$$

a) Benutzen Sie die Bernoullische Ungleichung, um zu zeigen, daß diese letztere Ungleichung gilt[3].

b) Um zu zeigen, daß die Folge (x_n) konvergiert[4], bleibt noch zu zeigen, daß sie nach oben beschränkt ist. Dazu rechnen Sie x_n zunächst mit Hilfe der binomischen Formel aus.
Es ergibt sich $x_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{1}{n^i}$. Benutzen Sie, ausgehend von dieser Gleichung, die Formel $\binom{n}{i} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-i+1)}{i!}$ sowie die für $i \geq 1$ gültige Ungleichung $i! \geq 2^{i-1}$, um zu zeigen:

$$x_n \leqslant 3 .$$

Aufgabe 4

In der Vorlesung wurde gezeigt, daß die Harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert.

Geben Sie einen Wert für die obere Summationsgrenze *n* an, bei dem Sie sicher sind, daß $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \geq 10$.
(Begründung!)

---

3 Sie haben dann nachgewiesen, daß die Folge $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ tatsächlich monoton steigend ist.

4 Wir werden später sehen, daß der Grenzwert gleich der Eulerzahl *e* ist.