Höhere Mathematik I, WS2013/14
M. Hortmann

Blatt 5

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Lösungen

Namen							**Gruppennr.**	**Tutor**
1a	b	c	d	e	2	3	**Summe**	**bearbeitet**
1	1	1	1	1	1	1	5 Punkte=100%	

Aufgabe 1

Ist $z=a+bi\in\mathbb{C}$ mit $a,b\in\mathbb{R}$, so setzt man $\bar{z}:=a-bi$ und nennt $\bar{z}$ die zu z *konjugiert komplexe* Zahl. Außerdem setzt man $|z|:=\sqrt{z\bar{z}}=\sqrt{a^2+b^2}$ und nennt dies den *Absolutbetrag* von z. Offenbar ist das eine mit dem Absolutbetrag auf $\mathbb{R}$ konsistente Definition, und man hat auch sofort $|z|^2=z\bar{z}$.

Zeigen Sie, daß für beliebige $z,w\in\mathbb{C}$ gilt:
a) $\overline{zw}=\bar{z}\bar{w}$
b) $|zw|^2=|z|^2\cdot|w|^2$ [1]
c) Ist $z\neq 0$, so ist $|z^{-1}|=|z|^{-1}$.

Der Einheitskreis $S\subset\mathbb{C}$ besteht definitionsgemäß aus sämtlichen Punkten $z\in\mathbb{C}$ mit $|z|=1$. Offenbar ist auch $1\in S$, und mit b) und c) sieht man sofort, daß S Untergruppe von $\mathbb{C}^*$ bezüglich der Multiplikation ist.

d) Zeigen Sie, daß $z=\frac{\sqrt{5}-1}{4}+i\sqrt{\frac{\sqrt{5}+5}{8}}$ auf dem Einheitskreis liegt und berechnen Sie die Potenzen $z^2,\dots,z^5$ von z und fertigen eine Skizze an, wo diese auf dem Einheitskreis liegen[2].
(In der *Galoistheorie* würde man lernen, wie man auf obiges z kommt.)

e) Sei $z=a+ib\in\mathbb{C}$ mit $b\geq 0$. Setzen Sie $w=x+iy$ und machen den Ansatz $w^2=z$. Bestimmen Sie daraus durch schulmäßiges Lösen von quadratischen! Gleichungen x,y so, daß $x,y\geq 0$. Machen Sie anschließend die Probe, daß tatsächlich $w^2=z$ und finden Sie so konkret eine Quadratwurzel von $z=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$. Zeichnen Sie auch ein Bild, wo diese beiden Punkte auf dem Einheitskreis liegen.

1 damit auch $|zw|=|z|\cdot|w|$
2 Dieses z kannten auch die Griechen. Mit 19 Jahren fand Gauß ein entsprechendes z für ein regelmäßiges 17-Eck. Dies war für ihn die endgültige Motiviation, Mathematik und Physik statt Philosophie und Sprachen zu studieren.

Aufgabe 2

Betrachten Sie auf $\mathbb{R}^2$ die Metriken $d_1(x,y) := |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ und $d_\infty := \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$ Zeichnen Sie ein Bild, wie eine ε-Umgebung des Nullpunkts bezüglich beider Metriken[3] aussieht, und schreiben Sie eine kurze Erklärung dazu.

Aufgabe 3

Auf jeder nicht-leeren Menge M läßt sich die sogenannte *diskrete Metrik* definieren durch
$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad x \neq y \\ 0 & \text{falls} \quad x = y \end{cases}$.

Normalerweise betrachten wir auf $\mathbb{R}$ die durch $d(x,y) = |x - y|$ definierte sog. Euklidische Metrik. Im Folgenden aber stattdessen die diskrete Metrik:

Man zeige, daß mit dieser Metrik die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht den Grenzwert 0 besitzt.[4] [5]

---

3 Machen Sie sich auch klar, wie das entsprechende Bild im $\mathbb{R}^3$ aussähe!

4 Sie besitzt überhaupt keinen Grenzwert.

5 Es kommt also für die Konvergenz einer Folge auf die betrachtete Metrik an. Es ist aber nicht schwer zu zeigen, daß im $\mathbb{R}^n$ für die Metriken $d_1(x,y) := \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$ (die Taxifahrermetrik), $d_1(x,y) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$ (die Euklidische Metrik) und $d_\infty := \max_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|$ (die Maximumsmetrik) jede bezüglich einer Metrik konvergente Folge auch bezüglich jeder der anderen konvergent ist und denselben Grenzwert besitzt. Dies liegt letztlich daran, daß man in jede ε-Umgebung bezüglich einer dieser Metriken eine ε-Umgebung jeder der anderen Metriken hineinlegen kann.