Höhere Mathematik I, WS2013/14
M. Hortmann

Blatt 3

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Lösungen

<table>
<tr><th colspan="8">Namen</th><th>Gruppennr.</th><th>Tutor</th></tr>
<tr><td colspan="8"></td><td rowspan="4"></td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td colspan="8"></td></tr>
<tr><td colspan="8"></td></tr>
<tr><td colspan="8"></td></tr>
<tr><td>1a</td><td>1b</td><td>1c</td><td>2a</td><td>2bα</td><td>2bβ</td><td>2cα</td><td>2cβ</td><td>Summe</td><td>bearbeitet</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>6 Punkte=100%</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Aufgabe 1

Zeigen Sie durch Induktion:

a) $\forall n \in \mathbb{N}: \sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$

b) $\forall n \in \mathbb{N}_0: \ \forall m \in \mathbb{N}_0: \ 0 \le m \le n \ \rightarrow \ \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

Hinweis: Setzen Sie $E(n)$ gleich $\forall m \in \mathbb{N}_0: \ 0 \le m \le n \ \rightarrow \ \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ und zeigen $E(0)$ und $E(n) \rightarrow E(n+1)$. Benutzen Sie die bekannten Rekursionsformeln für die Binomialkoeffizienten.

c) Für $x \in \mathbb{R}$ und $x \geq -1$ gilt: $\forall n \in \mathbb{N}: \ (1+x)^n \geqslant 1 + nx$

Aufgabe 2

Denken Sie zunächst nach, daß und wie die Parifunktion

```
myfac(n)=if(n,return(n*myfac(n-1)),return(1))
```

die Fakultätsfunktion realisiert.

a) Benutzen Sie die rekursive Definition der Binomialkoeffizienten, um entsprechend eine Funktion

```
mybinomial(m,n)
```

zu schreiben!

b) A propos Binomialkoeffizienten: In der Lotterie „Euromillionen“ muß man 2 von 11 Sternen und 5 von 50 weiteren Zahlen ankreuzen.

α) Wieviele verschiedene Tipps sind möglich?

Bei der „Ziehung“ wird eine dieser Möglichkeiten realisiert.

β) Fertigen Sie eine Liste an, die angibt, wieviele Tippmöglichkeiten es anschließend gibt, $0 \le n \le 2$ Sterne und $0 \le m \le 5$ von den weiteren Zahlen korrekt geraten zu haben.
Ordnen Sie die Liste nach den errechneten Anzahlen:

n=2, m=5: 1 Möglichkeit
…
n=0, m=0: die meisten Möglichkeiten

c) Die Ackermann-Funktion $a : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$ ist extrem interessant.
Sie wird u.a. folgendermaßen rekursiv definiert:

$a(0,m):=m+1$
$a(n+1,0):=a(n,1)$
$a(n+1,\mathrm{m}+1):=\mathrm{a}(n,\mathrm{a}(n+1,m))$

Machen Sie sich zunächst klar, daß dadurch wirklich Funktionswerte für alle nichtnegativen Argumente n,m definiert sind.

α) Schreiben Sie eine entsprechende Pari-Funktion.
Damit Sie eine Ahnung bekommen, was passiert, beginnen Sie Ihre Funktionsdefinition auch einmal so:

```
a(n,m)=print(count++); …
```

und setzen vor jedem Aufruf `count=0` ,

und/oder beginnen Sie mit

```
a(n,m)=print(n," ",m); …
```

bevor Sie ein paar Beispiele rechnen. Für welche Werte von n, m kommen Sie zu einem Ergebnis?

β) Entdecken Sie mit Hilfe von Pari eine Formel für den Wert $a(3,m)$ und beweisen Sie diese durch Induktion.

γ) Freiwillige Sonderaufgabe: Was ist mit $a(4,m)$?