Höhere Mathematik I, WS2013/14
M. Hortmann

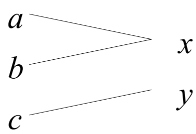
Blatt 2

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Lösungen

Namen						**Gruppennr.**	**Tutor**
1	2	3	4a	b	5	**Summe**	**bearbeitet**
1	1	1	1	1	1	5 Punkte=100%	

Aufgabe 1

Sei $M=\{a,b,c\}$ und $N=\{x,y\}$.
Mit Hilfe von Diagrammen der Form



fertige man eine Liste aller Abbildungen $M \to N$ und gebe an, welche von ihnen injektiv, nicht-injektiv, surjektiv, nicht-surjektiv ist.

Aufgabe 2

Seien M, N Mengen und $f : M \to N$ eine Abbildung.
Für $V \subset N$ setzt man $f^{-1}(V) := \{x \in M \mid f(x) \in V\}$ [1].
Man nennt $f^{-1}(V)$ auch *Urbildmenge von V (unter f).*

Seien konkret $M=N=\{1,2,3\}$ und es sei $f(1)=2, f(2)=2, f(3)=1$.
Stellen Sie eine zweispaltige Liste auf, in deren erster Spalte sämtliche Teilmengen von N stehen, und in der zweiten Spalte die zugehörigen Urbildmengen.

---

1 Diese Schreibweise hat nichts mit der inversen Abbildung zu tun. f muß nicht hier nicht bijektiv sein, d.h. eine inverse Abbildung f^{-1} braucht gar nicht zu existieren.

Aufgabe 3

Nehmen Sie es als Tatsache hin, daß es keine rationale Zahl gibt, deren Quadrat gleich 2 ist.
Weisen Sie nun nach, daß die Menge $G:=\{a+b\sqrt{2} \mid a,b\in\mathbb{Q} \text{ und } (a\neq 0 \text{ oder } b\neq 0)\}$ bezüglich der üblichen Multiplikation reeller Zahlen eine Gruppe bildet.

Aufgabe 4

Nummerieren Sie die Ecken eines regelmäßigen Tetraeders von 1 bis 4 durch.
Die Menge der Rotationen im dreidimensionalen Raum, die den Tetraeder auf sich selbst abbilden, bildet offenbar eine Gruppe[2]. Jede dieser Rotationen bildet die Menge der Ecken des Tetraeders auf sich selbst ab. Sie können also jede solche Rotation als Permutation von 4 Elementen schreiben.

a) Listen Sie alle Permutationen dieser Gruppe auf.
b) Zeigen Sie, daß die Gruppe nicht kommutativ ist.

Aufgabe 5

Wir schreiben $\mathbb{N}_0:=\mathbb{N}\cup\{0\}$.

Sei $n\in\mathbb{N}$. Ist dann $m\in\mathbb{N}_0$, so gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $q,r\in\mathbb{N}_0$ mit $m=q\cdot n+r$ und $r<n$.
(Division mit Rest. Man schreibt $m\%n$ für den Divisionsrest r.)

Weil p=2147483659 eine Primzahl ist, läßt sich leicht zeigen, daß die Menge $\mathbb{Z}_p^*:=\{1,2,\ldots,p-1\}$ mit der durch $a\otimes b:=(a\cdot b)\%\,p$ gegebenen Operation[3] eine Gruppe bildet.

Berechnen Sie das zu $a=135\in\mathbb{Z}_p^*$ inverse Element, indem Sie mit Hilfe eines geeigneten Pari-Programms[4] alle Produkte $a\otimes b$ mit $b\in\mathbb{Z}_p^*$ probieren, bis $a\otimes b=1$.

Dokumentieren Sie Ihre Pari-Programmzeile(n) und den Output.

2 Man hätte statt des Tetraeders auch jeden anderen platonischen Körper nehmen können.
3 D.h. man bildet erst das übliche Produkt der natürlichen Zahlen a,b , und nimmt als Endergebnis den Rest, der sich bei Division dieses Produktes durch p ergibt.
4 Mit dem sog. „erweiterten Euklidischen Algorithmus“ ließe sich 135^{-1} in $\mathbb{Z}_p^*$ auch per Hand ausrechnen.