Definitionen und Aussagen zur Analysis

Metrischer Raum

Sei M eine nicht-leere Menge, $d: M \times M \to \mathbb{R}_+$ eine Metrik auf M, also (M, d) ein metrischer Raum. Für $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ und $x \in M$ heißt die Menge $U_\varepsilon^d(x) := \{ y \in M \mid d(x,y) < \varepsilon \}$ „**offene Kugel** mit Radius ε um den Punkt x bezüglich der Metrik d. Wenn implizit klar ist, welche Metrik gemeint ist, so schreibt man nur $U_\varepsilon(x)$ und auch nur M für den metrischen Raum.

Auf dem $\mathbb{R}^n$ betrachtet man meist die durch $d(x,y) := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ gegebene „**euklidische Metrik**“, manchmal aber auch die durch $d(x,y) := \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$ gegebene „Taxifahrermetrik“. Versuchen Sie, sich die offene Kugel mit Radius 1 um den Nullpunkt bezüglich der Taxifahrermetrik im $\mathbb{R}^3$ vorzustellen!

In $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ sind beide Metriken identisch, es ist dort $d(x,y) = |x - y|$.

Jede Teilmenge eines metrischen Raums M erbt die Metrik von M, ist also in natürlicher Weise selbst ein metrischer Raum.

Normierter Vektorraum

Wir betrachten in diesem Zusammenhang zunächst nur nur relle oder komplexe Vektorräume, d.h. der Grundkörper K für den Vektorraum ist $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Eine **Norm** auf einem Vektorraum ordnet jedem Vektor eine nicht-negative reelle Zahl zu, so daß

$$\|x\| = 0 \iff x = 0$$
$$\forall \lambda \in K,\ x \in V : \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$ [1]
$$\forall x, y \in V : \|x + y\| \le \|x\| + \|y\| \quad \text{(Dreiecksungleichung)}$$

Ein normierter Vektorraum ist in natürlicher Weise ein metrischer Raum, indem man setzt: $d(x,y) := \|x - y\|$. Die Norm mißt also den Abstand vom Nullpunkt. Für $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$ benutzt man meist die **euklidische Norm**: Ist $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$ $\|x\| := \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$, manchmal auch die der Taxifahrermetrik entsprechende Norm $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$. Wir werden später auch unendlich dimensionale Vektorräume kennenlernen, die in natürlicher Weise normiert sind, insbesondere Funkionenräume.

---

[1] Man erinnere sich, daß für $\lambda = x + iy \in \mathbb{C}$ der Betrag durch $|\lambda| := \sqrt{\lambda \bar{\lambda}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ definiert war.

Konvergente Folgen
Sei M ein metrischer Raum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten in M und $a\in M$. Man sagt, „die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **konvergiert** gegen a“, oder „a ist **Grenzwert** der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$“, wenn $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n\geq n_0:\ x_n\in U_\varepsilon(a)$, bzw. $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n\geq n_0:\ d(x_n,a)<\varepsilon$.
Man schreibt statt „a ist Grenzwert der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$“ auch kurz: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Stetigkeit
Ist $f:M\to N$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen und $x_0\in M$, so heißt f „**stetig** in x_0“, wenn gilt: $\forall\varepsilon>0\exists\delta>0:\ f\left(U_\delta(x_0)\right)\subset U_\varepsilon\left(f\left(x_0\right)\right)$, bzw.
$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\ \forall x\in M:\ d(x,x_0)<\delta\ \to\ d\left(f(x),f(x_0)\right)<\varepsilon$. [2]
f heißt **stetig auf *M***, wenn f stetig in jedem Punkt von M ist.

Ist $f:M\to N$ stetig in $x_0\in M$ und $g:N\to L$ stetig in $y_0=f(x_0)\in N$, so zeigt man leicht, daß die Abbildung $(g\circ f):M\to L$ ebenfalls stetig in $x_0\in M$ ist. Daher ist insgesamt mit g und f auch $g\circ f$ stetig.

Man kann leicht folgenden **Zusammenhang zwischen Konvergenz und Stetigkeit** zeigen:
f ist genau dann stetig in x_0, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M, deren Grenzwert x_0 ist, die Folge der Bildpunkte $\left(f\left(x_n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ den Grenzwert $f\left(x_0\right)$ besitzt.

Außerdem gelten folgende **Grenzwertsätze** für
Summen, Produkte und Quotienten konvergenter Folgen:
Sind $(x_n)_{n\in\mathbb{N}},(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen im metrischen Raum (M,d), so bildet man die Summen- und Produktfolge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}},(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $s_n:=x_n+y_n$, $p_n:=x_n\cdot y_n$. Gilt nun $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$, so auch $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=a+b$, $\lim\limits_{n\to\infty}p_n=a\cdot b$. Gilt zusätzlich $\forall n\in\mathbb{N}: y_n\neq 0$ und $b\neq 0$, konvergiert die durch $q_n:=\dfrac{x_n}{y_n}$ definierte Quotientenfolge $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\lim\limits_{n\to\infty}q_n=\dfrac{a}{b}$.

Diese Sachverhalte schreibt kann man auch so schreiben:
$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n+y_n\right)=\lim_{n\to\infty}x_n+\lim_{n\to\infty}y_n\ ,\quad \lim_{n\to\infty}\left(x_ny_n\right)=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\lim_{n\to\infty}y_n$$
$$\lim_{n\to\infty}y_n\neq 0\quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}$$

Dabei ist eine Gleichung zwischen Ausdrücken mit Limiten immer so zu interpretieren: wenn die Grenzwerte auf der rechten Seite existieren, dann auch die auf der linken und dann gilt Gleichheit.

Eine Folge reeller Zahlen mit Grenzwert Null nennt man auch eine **Nullfolge**.

---

[2] Es ist bequem, in diesem Zusammenhang sowohl die Metrik auf M wie auch die auf N „d“ zu benennen.

Das sogenannte „**Archimedische Axiom**“ für die reellen Zahlen besagt: zu jeder reellen Zahl gibt es eine größere natürliche Zahl. Daraus folgt umgekehrt, daß $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

$\left(\frac{1}{n}\right)$ ist also eine Nullfolge; mit der **Bernoullischen** Ungleichung $\forall n\in\mathbb{N}:\ (1+x)^n\geq(1+nx)$ für $x\in\mathbb{R}, x\geq -1$ zeigt man, daß auch $\left(q^n\right)$ für $q\in\mathbb{R}, |q|<1$ eine Nullfolge ist. Man nennt auch Folgen in einem normierten Vektorraum, z.B. im $\mathbb{R}^n$, Nullfolge, wenn ihr Grenzwert der Nullvektor ist.

Eine Folge (x_n) in einem metrischen Raum M ist genau dann konvergent mit Grenzwert $a\in M$, wenn die Folge der Abstände $(d(x_n,a))$ - und dies ist eine Folge in $\mathbb{R}$ - Nullfolge ist. Somit ist auch eine Folge (x_n) in einem normierten Vektorraum Nullfolge, wenn die Folge der Normen $(\|x_n\|)$ Nullfolge in $\mathbb{R}$ ist.

Mit den Grenzwertsätzen rechnet man auch z.B. Folgendes:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+3n+1}{3n^3+2n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{3+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^3}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^3}\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}}{\lim\limits_{n\to\infty}3+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^3}}=\frac{2}{3}$$

Dabei ist z.B. $\lim_{n\to\infty}2$ ist zu interpretieren als Grenzwert der Folge, deren sämtliche Folgenglieder 2 sind, und dieser Grenzwert ist natürlich gleich 2.

Ohne den Grenzwert zu kennen, kann man von einer Folge in $\mathbb{R}$, welche **monoton wachsend** und **nach oben beschränkt** ist, d.h. $\forall n,m\in\mathbb{N}:\quad n\leq m\to x_n\leq x_m$ und $\exists A\in\mathbb{R}\,\forall n\in\mathbb{N}:\ x_n\leq A$ sagen, daß sie einen Grenzwert besitzt.

Eine Folge (x_n) in einem metrischen Raum (M,d) heißt **Cauchyfolge**, wenn $\forall\varepsilon>0\,\exists n_0\in\mathbb{N}\,\forall n,m\geq n_0:\ d(x_n,x_m)<\varepsilon$. Es sollen also ab einem gewissen Index die Abstände der Folgenglieder kleiner sein als ein jeweils vorgegebener Abstand. Man zeigt leicht, daß jede Folge, die einen Grenzwert besitzt, eine Cauchyfolge ist. In der Definition von Cauchyfolge kommt aber der Grenzwert selbst nicht vor!

Man nennt einen metrischen Raum **vollständig**, wenn in ihm jede Cauchyfolge konvergiert. Die Menge der rationalen Zahlen mit euklidischen Abstandsmetrik ist nicht vollständig, da man leicht (siehe Aufgaben) eine Cauchyfolge rationaler Zahlen konstruieren kann, deren Grenzwert die reelle Zahl $\sqrt{2}$, also nicht rational ist. Ein nicht-vollständiger Raum besitzt demnach „Lücken“, ein vollständiger nicht.

Wichtige Beispiele vollständiger metrischer Räume sind die reellen und die komplexen Zahlen mit der euklidischen Metrik, sowie endlich-dimensionale normierte Vektorräume über diesen Körpern, also i.w. $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ Außerdem sind **abgeschlossene Teilmengen** vollständiger metrischer Räume selbst vollständig.

Eine Teilmenge K eines metrischen Raums heißt **abgeschlossen**, wenn $\forall x \in (M-K) \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \subset (M-K)$, d.h. Punkte außerhalb K haben von K einen gewissen Abstand, was man auch so interpretieren kann, daß „Randpunkte von K" zu K gehören. So sind z.B. abgeschlossene Intervalle in $\mathbb{R}$ und abgeschlossene Kugeln $\overline{U}_\varepsilon(x) := \{ y \in M \mid d(x,y) \le \varepsilon \}$ in metrischen Räumen abgeschlossen, offene Intervalle in $\mathbb{R}$ und offene Kugeln in metrischen Räumen (soweit sie nicht den ganzen Raum umfassen) dagegen nicht.

Eine Teilmenge K eines metrischen Raums heißt **beschränkt**, wenn $\exists A \in \mathbb{R} \forall x, y \in K : \ d(x,y) < A$, wenn also alle Abstände von Punkten in K unterhalb einer vorgegebenen Schranke bleiben.

Räume stetiger Funktionen

Beschränkte und abgeschlossene Mengen in endlichdimensionalen normierten Vektorräumen über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ besitzen noch eine weitere wichtige Eigenschaft: auf ihnen nehmen stetige Funktionen ein Maximum und ein Minimum an. Ist also $K \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und abgeschlossen und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig, so gilt $\exists x_0, y_0 \in K \ \forall x \in K : \ f(y_0) \le f(x) \le f(x_0)$. Den maximalen Wert $f(x_0)$ nennen wir auch $\max\limits_{x \in K} f$, den minimalen Wert $f(x_0)$ nennen wir $\min\limits_{x \in K} f$. Mit $|f|$ bezeichnen wir die durch $x \to |f(x)|$ gegebene Abbildung. Mit f ist auch $|f|$ stetig und nimmt daher auf K ein Maximum an. Man setzt $\|f\|_K := \max\limits_{x \in K} |f|$, schreibt – wenn der Kontext klar ist - manchmal stattdessen auch nur $\|f\|$. Die Menge der auf K stetigen Funktionen $\boldsymbol{C(K)} := \{ f : K \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig} \}$ ist in natürlicher Weise ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Mit $f, g \in C(K), \lambda \in \mathbb{R}$ sind auch die durch $x \to f(x) + g(x)$ und $x \to \lambda f(x)$ definierten Funktionen $(f+g), (\lambda f)$ Elemente von $C(K)$, und durch $f \to \|f\|$ ist eine Norm auf $C(K)$. Man kann zeigen, daß $C(K)$ vollständig ist bezüglich der durch diese Norm definierten Metrik. Es stellt sich heraus, daß sich dabei recht komplexe Funktionen wie z.B. die Exponentialfunktion als Grenzwerte einfacherer polynomialer Funktionen ergeben. Der Raum $C(K)$ ist für unendliche Mengen K nicht mehr endlich-dimensional, d.h. es gibt keine endliche Basis.

Banachscher Fixpunktsatz

Ist M ein metrischer Raum und $f : M \to M$, so heißt f **Kontraktion,** wenn es eine reelle Konstante $0 \le c < 1$ gibt, so daß gilt: $\forall x, y \in M : d(f(x), f(y)) \le c d(x,y)$. Beim Abbilden schrumpfen die Abstände von Punkten also mindestens um einen festen Faktor. Man zeigt leicht, daß eine Kontraktion einen eindeutig bestimmten **Fixpunkt** besitzt, also einen Punkt $x_0 \in M$ mit $f(x_0) = x_0$. Dieser Fixpunkt läßt sich finden als Grenzwert einer Folge von Punkten in M, indem man mit einem beliebigen Punkt $x_1 \in M$ beginnt und jetzt iterativ f anwendet: $x_{n+1} := f(x_n)$.

Es ist häufig möglich, ein mathematisches Objekt dadurch zu konstruieren, daß man eine geeignete Kontraktion und dann mit der eben geschilderten Methode deren Fixpunkt findet.

Wird fortgesetzt.