Blatt 9
Musterlösungen

Aufgabe 1.

Gegeben sei die Abbildung $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$. Man zeige durch direktes Ausrechnen des Grenzwerts, dass $f'(2)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=4$. Hinweis: Man muß also für eine beliebige Folge reeller Zahlen $(x_n)\to 2,\ x_n\neq 2$ zeigen, dass $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(2)}{x_n-2}=4$.

Lösung:
Sei also $(x_n)\to 2,\ x_n\neq 2$. Man rechnet:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(2)}{x_n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2-4}{x_n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(x_n-2)(x_n+2)}{x_n-2}=$$
$$\lim_{n\to\infty}(x_n+2)=\left(\lim_{n\to\infty}x_n\right)+2=2+2=4$$

Dabei folgen wir wie immer der Konvention, daß in einer Gleichungskette, die Grenzwerte enthält, jede Gleichung so zu interpretieren ist: „Wenn der Wert auf der rechten Seite existiert, dann auch der Wert auf der linken Seite, und beide Seiten sind gleich."

Aufgabe 2.

Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ an der Stelle $x_0:=3$ differenzierbar. Es gibt also eine Zahl $a\in\mathbb{R}$ nämlich die Ableitung von f an der Stelle $x_0=3$, so dass gilt:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\forall x\in\mathbb{R}:\ |x-3|<\delta\to\left|\frac{f(x)-f(3)}{x-3}-a\right|<\varepsilon\ .$$

Folgern Sie hieraus, dass f an der Stelle $x_0:=3$ stetig ist. (Dazu muß man die $\varepsilon,\delta-$Definition der Stetigkeit kennen.)

Lösung:
Schreiben wir zunächst obige Voraussetzung um:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\forall x\in\mathbb{R}:\ |x-3|<\delta\to\left|f(x)-f(3)-a(x-3)\right|<\varepsilon|x-3|.$$

Die Dreiecksungleichung für den Absolutbetrag in $\mathbb{R}$ lautet $|u+v|\le|u|+|v|$. Also ist auch $|u|=|(u-v)+v|\le|u-v|+|v|$, woraus folgt $|u|-|v|\le|u-v|$. Damit schreiben wir weiter

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\forall x\in\mathbb{R}:\ |x-3|<\delta\to-|a||x-3|+|f(x)-f(3)|<\varepsilon|x-3|$$ und weiter

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\forall x\in\mathbb{R}:\ |x-3|<\delta\to|f(x)-f(3)|<(\varepsilon+|a|)|x-3|.$$

Wählen wir nun zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ einerseits $\delta > 0$ so, daß
$\forall x \in \mathbb{R}: \ |x-3| < \delta \to \left| f(x) - f(3) \right| < \left(\varepsilon + |a| \right) |x-3|$ und verkleinern andererseits δ ggf. weiter, so daß auch noch $\delta \le \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon + |a|}$. Jetzt können wir weiter abschätzen:
$\forall x \in \mathbb{R}: \ |x-3| < \delta \to < \left| f(x) - f(3) \right| < \left(\varepsilon + |a| \right) |x-3| < \left(\varepsilon + |a| \right) \delta \le \varepsilon$.

Dies bedeutet: Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ können wir $\delta > 0$ so wählen, daß
$\forall x \in \mathbb{R}: \ |x-3| < \delta \to < \left| f(x) - f(3) \right| < \varepsilon$.

Das heißt aber gerade: f stetig in 3.

Aufgabe 3.

Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x_1, x_2) = x_1^{\,2} + x_2^{\,2}$. Sei $x^0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass f in x^0 differenzierbar und daß $Df\left(x^0\right)$ die Nullabbildung ist, indem Sie direkt nachweisen, dass
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \, \forall x \in \mathbb{R}: \|x\| < \delta \to \left| f(x) \right| < \varepsilon \|x\|$.

Lösung:

Sei $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Nullabbildung, d.h. $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}: \varphi(x_1, x_2) = 0$. Offenbar ist φ linear. Um zu zeigen, daß f in x^0 differenzierbar und daß $Df\left(x^0\right) = \varphi$, muß man nachweisen:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \, \forall x \in \mathbb{R}: \|x\| < \delta \to \frac{\left| f(x) - f(x^0) - \varphi(x - x^0) \right|}{\left\| x - x^0 \right\|} < \varepsilon .$$

Unter den gegebenen speziellen Voraussetzungen reduziert sich dies auf die in der Aufgabenstellung gegebene Aussage.

Es ist also $\left| f(x) \right|$ abzuschätzen. Wir rechnen
$\left| f(x) \right| = \left| f(x_1, x_2) \right| = x_1^2 + x_2^2 = \|x\|^2 = \|x\| \|x\|$.

Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ wählen wir jetzt einfach $\delta = \varepsilon$ und haben damit
$\forall x \in \mathbb{R}: \ \|x\| < \delta \to \ \left| f(x) \right| = \left| f(x_1, x_2) \right| = x_1^2 + x_2^2 = \|x\|^2 = \|x\| \|x\| < \delta \|x\| = \varepsilon \|x\|$,
was zu zeigen war.