Mathematik I für Physiker und Elektrotechniker WS03/04
Aufgabenblatt 9

Aufgabe 1.

Gegeben sei die Abbildung $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$. Man zeige durch direktes Ausrechnen des Grenzwerts, dass $f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=4$. Hinweis: Man muß also für eine beliebige Folge reeller Zahlen $(x_n)\to 2,\ x_n\neq 2$ zeigen, dass $\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(2)}{x_n-2}=4$.

Aufgabe 2.

Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ an der Stelle $x_0:=3$ differenzierbar. Es gibt also eine Zahl $a\in\mathbb{R}$ nämlich die Ableitung von f an der Stelle $x_0:=3$, so dass gilt:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\forall x\in\mathbb{R}:\ |x-3|<\delta\to\left|\frac{f(x)-f(3)}{x-3}-a\right|<\varepsilon\ .$$

Folgern Sie hieraus, dass f an der Stelle $x_0:=3$ stetig ist. (Dazu muß man die $\varepsilon,\delta-$Definition der Stetigkeit kennen.)

Aufgabe 3.

Sei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ gegeben durch $f(x_1,x_2)=x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}$. Sei $x^0:=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass f in x^0 differenzierbar und daß $Df\left(x^0\right)$ die Nullabbildung ist, indem Sie direkt nachweisen, dass

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\forall x\in\mathbb{R}:\|x\|<\delta\to\left|f(x)\right|<\varepsilon\|x\|.$$

Aufgabe 4.

Sei $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ gegeben durch $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_2x_3$. Berechnen Sie für den Punkt $x^0:=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ durch direkte Berechnung der partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)$ die Ableitung

$$Df(x^0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x^0),\frac{\partial f}{\partial x_2}(x^0),\frac{\partial f}{\partial x_3}(x^0)\right).$$