Mathematik I für Physiker und Elektrotechniker WS03/04
Aufgabenblatt 8

Aufgabe 1
Aus der Gleichung $\exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x)$ und der „Funktionalgleichung"
$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ leite man die sog. Additionsformeln für Sinus und Cosinus her:

$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \;\; \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

Aufgabe 2
Es ist $\forall x \in \mathbb{R}: \;\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, und $\frac{\pi}{2}$ ist die kleinste positive Nullstelle der reellen Cosinusfunktion. Wegen $\cos(0) = 1$ folgt dann für $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ $\;0 \le \cos x \le 1$ und wegen $\cos(-x) = \cos(x)$ folgt sogar für $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ $\;0 \le \cos x \le 1$. Aus $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ folgt $\sin(-x) = -\sin(x)$.

Zeigen Sie mit Hilfe dieser Tatsachen und der Additionsformeln, daß

a) $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x), \;\; \cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x$
b) Für $0 \le x \le \pi$ ist $0 \le \sin x \le 1$
c) $\forall x \in \mathbb{R}: \sin(x + 2\pi) = \sin x, \;\; \cos(x + 2\pi) = \cos x$
d) $\forall x \in \mathbb{R}: \cos^2(\frac{x}{2}) = \frac{1+\cos x}{2}$ (Hinweis: Gehen Sie aus von $\cos(x) = \cos(\frac{x}{2} + \frac{x}{2})$)
e) $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$

Aufgabe 3
Man betrachte die reelle Exponentialfunktion, die durch die bekannte für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergente Potenzreihe $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ gegeben ist. Offenbar ist für $x \ge 0$ auch $\exp(x) \ge 1$.
Man benutze dies und die Funktionalgleichung, um zu zeigen

a) $\forall x \in \mathbb{R}: \exp(x) \ge 0$
b) $\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad x < y \;\; \to \;\; \exp(x) < \exp(y)$
c) Es ist $e := \exp(1)$. Man zeige für $n \in \mathbb{Z}: \exp(n) = e^n$.

Aufgabe 4

Man betrachte die antisymmetrische Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Die „transponierte Matrix“ A^t entsteht aus A durch Vertauschen der Zeilen und Spalten, es ist also $A^t = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Die Antisymmetrie drückt sich dann durch die Gleichung $A^t = -A$ aus.

Offenbar ist

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \exp\left(A - A\right) = \exp(A)\exp(-A) = \exp(A)\exp(A^t) = RR^t.$$

Die Gleichung $RR^t = E$ bedeutet offenbar gerade, daß jede Spalte der Matrix A die Länge 1 besitzt und die Spalten aufeinander senkrecht stehen.

Durch Einsetzen von A in die Exponentialreihe berechne man mit Hilfe von Pari oder einem anderen Computerprogramm möglichst genau $R = \exp(A)$ und überprüfe, daß tatsächlich $RR^t \approx E$.

Sei $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Offenbar ist $Ax = 0$. (Prüfen Sie es nach!). Daher sollte auch gelten:

$Rx = \exp(A)x = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n \right) x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (A^n x) = Ex + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (A^n x) = Ex = x$. Der Vektor x ist also ein Fixpunkt der „Rotation“ R, die man als Drehung der durch x gegebenen Achse interpretieren kann. Wir werden später lernen, um welchen Winkel hier gedreht wird.

Prüfen Sie mit Pari oder einem anderen Computerprogramm nach, daß tatsächlich $Rx \approx x$.