Mathematik I für Physiker und Elektrotechniker WS03/04
Aufgabenblatt 7

Machen Sie sich mit dem Computeralgebra und Arithmetikprogramm PariGP bekannt. Es ist für alle Unix und Windows frei verfügbar, und zwar unter http://pari.math.u-bordeaux.fr/, einschließlich ausführlicher Dokumentation. Manche der folgenden Aufgaben erfordern recht umfangreiche Rechnungen, die sinnvollerweise nur per Computer machbar sind.

Aufgabe 1

Man erinnere sich an die Cauchy Schwarzsche Ungleichung im $\mathbb{R}^n$:

$\forall a,b \in \mathbb{R}^n: \quad |<a,b>| \leq \|a\| \cdot \|b\|$ bzw. $|<a,b>|^2 \leq \|a\|^2 \cdot \|b\|^2$, was wiederum gleichbedeutend ist mit $\forall a_1, \ldots a_n, b_1, \ldots b_n \in \mathbb{R}: \quad \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right)$

Für reelle eine reelle $m \times n$ *Matrix* $A = \left(a_{ij} \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ definieren wir die euklidische Norm durch

$\|A\| := \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2}$. Damit wird der Matrizenraum $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ zu einem normierten Vektorraum.

Wichtig und interessant ist nun die folgende Verträglichkeit von Matrizenprodukt und Norm: Ist *A* eine reelle Matrix mit *m* Zeilen und *n* Spalten, *B* mit *n* Zeilen und *k* Spalten, so läßt sich bekanntlich das Matrizenprodukt *AB=C* bilden, wobei *C m* Zeilen und *k* Spalten besitzt und für die Koeffzienten von *C* gilt $c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lk}$. Ausgehend von der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung läßt sich durch eine relativ einfache Rechnung zeigen, daß $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ bzw. $\|AB\|^2 \leq \|A\|^2 \cdot \|B\|^2$ (mit letzterem Ausdruck läßt sich meist leichter rechnen, weil er keine Wurzeln enthält).

a) Man verifziere mit Hilfe von Pari, eines anderen Computeralgebraprogramms, oder per Hand obige Normungleichung für das Matrizenprodukt $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

b) Für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.5 & 0.4 \end{pmatrix}$ gilt offenbar $\|A\| < 1$. Daher existiert der Grenzwert der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ (wobei $A^0 = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$) . Berechnen Sie diesen Grenzwert durch Auswertung möglichst vieler Summanden möglichst genau und prüfen Sie in diesem Fall die Korrektheit der Summenformel für die geometrische Reihe: $\sum_{n=0}^{\infty} A^n = (E - A)^{-1}$.

Aufgabe 2

Betrachten Sie die folgende einfache lineare Gleichung $Ax = b$ mit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Sie wissen bereits, daß Sie eine Lösung finden, indem Sie $A^{-1}b$ berechnen. Für große Gleichungssysteme ist es aber oft einfacher, den Banachschen Fixpunktsatz zu benutzen:

Dazu zerlegt man $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = D + \overline{D}$ und formt $Ax = b$ um in

$Dx + \overline{D}x = b$, $Dx = -\overline{D}x + b$, $x = -D^{-1}\overline{D}x + D^{-1}b$. Offenbar ist jetzt die gesuchte Lösung ein Fixpunkt unter der Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ x \to D^{-1}\overline{D}x + D^{-1}b$.

a) Zeigen Sie, daß eine Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ x \to Cx + d$ mit $C \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ und $d \in \mathbb{R}^2$ eine Kontraktion ist, wenn $\|C\| < 1$.

b) Zeigen Sie daß φ eine Kontraktion ist und benutzen ggf. 2a)

c) Setzen Sie $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ und berechnen x_n für einen möglichst hohen Index. Vergleichung Sie diesen Wert mit der durch Matrixinversion gewonnenen Lösung.

Das oben beschriebene Verfahren heißt Gauss-Seidel-Gesamtschrittverfahren.

Aufgabe 3

a) Berechnen Sie die Partialsumme s_{10} für die Exponentialreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \exp(1) = e$.

b) Berechnen Sie die Partialsumme s_{10} für die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ und multiplizieren Sie das Ergebnis anschließend mit $6\sqrt{3}$!

Aufgabe 4

Entscheiden Sie für alle $x \in \mathbb{R}$, ob die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ konvergiert oder divergiert. Nutzen Sie nach Möglichkeit das Quotientenkriterium[1]. Beachten Sie auch, daß eine Reihe jedenfalls divergiert, wenn die Folge der Summanden nicht den Grenzwert Null besitzt.

---

[1] Man nutzt das Q.K. auch zum Nachweis von Divergenz: wenn $\exists c > 1 \forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n \ge n_0 : \frac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|} \ge c$ oder sogar $\lim_{n\to\infty} \frac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|} > 1$, dann divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$