Mathematik I für Physiker und Elektrotechniker WS03/04
Aufgabenblatt 6

Seien U,V,W Vektorräume über einem Körper *K*.

Eine Abbildung $\varphi : U \times V \to W$ heißt **bilinear**, wenn
$\forall \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in K, u_1, u_2 \in U, v_1, v_2 \in V :$
$\varphi(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2) = \lambda_1 \mu_1 \varphi(u_1, v_1) + \lambda_1 \mu_2 \varphi(u_1, v_2) + \lambda_2 \mu_1 \varphi(u_2, v_1) + \lambda_2 \mu_2 \varphi(u_2, v_2)$

Das einfachste Beispiel einer bilinearen Abbildung $K \times K \to K$ ist die gewöhnliche Körpermultiplikation $\varphi(x, y) = x \cdot y$.

Auch das **Vektorprodukt** $\varphi : K^3 \times K^3 \to K^3$, $\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_y y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$ ist bilinear. Man schreibt für das Vektorprodukt zweier Vektoren *x*,*y* auch $x \times y$ und nennt es oft auch **Kreuzprodukt**. Das Kreuzprodukt läßt sich nur in einem dreidimensionalen Raum erklären. Eine bilineare Abbildung ist immer „eine Art Multiplikation“.

Ein **Skalarprodukt** auf einem reellen Vektorraum ist eine bilineare Abbildung $V \times V \to \mathbb{R}$ mit folgenden Zusatzeigenschaften (wir schreiben in diesem Kontext meist $< x, y >$ statt $\varphi(x, y)$):
$\forall x, y \in V : < x, y > = < y, x >$ (Symmetrie)
$\forall x \in V : < x, x > \geq 0$, $\forall x \in V : \quad < x, x > = 0$ gdw. $x = 0$ (positive Definitheit).

Im $\mathbb{R}^n$ benutzt man meist das „**kanonische Skalarprodukt**“ $< \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} > := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

Ein Skalarprodukt < , > definiert in natürlicher Weise eine Norm durch $\|x\| := \sqrt{< x, x >}$.
Wenn man für diese Norm die Dreiecksungleichung $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ nachweisen möchte, benötigt man die **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung**: $\forall x, y \in V : \quad |< x, y >| \leq \|x\| \|y\|$. Hat man im übrigen eine Norm, so durch $d(x, y) := \|x - y\|$ eine Metrik. Ein Vektorraum mit Skalarprodukt ist also automatisch ein metrischer Raum. Das kanonische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ führt dabei zur uns bekannten euklidischen Metrik.

Aufgabe 1.

a) Man betrachte die durch $\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) := 5x_1y_1 + 7x_1y_2 + 7x_2y_1 + 10x_2y_2$ gegebene Abbildung $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und zeige: φ ist ein Skalarprodukt. (Dieses ist natürlich verschieden vom kanonischen Skalarprodukt, welches uns zur Messung von Längen und später auch Winkeln dient.)

b) Man weise durch direkte Rechnung für zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^3$ nach, daß $< x, x \times y >= 0$

c) Man zeige $x \times y = 0$ gdw x, y sind linear abhängig .

Aufgabe 2. Banachscher Fixpunktsatz (extrem wichtig!)

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, d.h. jede Cauchyfolge in X konvergiert[1]. Eine Abbildung $f : X \to X$ heißt **Kontraktion,** wenn es eine reelle Konstante $0<c<1$ gibt mit $\forall x, y \in X : \; d\left(f(x), f(y)\right) \leq c d\left(x, y\right)$. Beim Abbilden schrumpfen also die Abstände zwischen Punkten um einen festen Faktor.

Man zeige:
a) Die Abbildung f ist stetig in jedem Punkt von X.
b) Die Abbildung f besitzt höchstens einen Fixpunkt, d.h. es gibt höchstens einen Punkt $x_0 \in X$ mit $f(x_0) = x_0$.
c) Man wähle einen beliebigen Punkt $x_1 \in X$ und definiere rekursiv $x_{n+1} = f(x_n)$ und zeige, daß (x_n) eine Cauchyfolge ist. Man zeige anschließend, daß der Grenzwert $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ ein Fixpunkt von f ist.

Es ergibt sich also: Jede Kontraktion besitzt einen eindeutig bestimmten Fixpunkt!

d) Man interpretiere Aufgabe 3a von Blatt 5 im obigen Kontext, setze $X = [1,2]$ mit der von den reellen Zahlen geerbten Metrik, zeige, daß für $x \in [1,2]$ auch $f(x) = \frac{x^2+2}{2x} \in [1,2]$ und zeige anschließend, daß mit $c = \frac{1}{2}$ die Abbildung $f : [1,2] \to [1,2]$ eine Kontraktion ist und daß der Fixpunkt $x_0 \in [1,2]$ die Gleichung $x_0^2 = 2$ erfüllt.

[1] Vollständig ist z.B. der $\mathbb{R}^n$ mit den uns bekannten Metriken, ebenso jede abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, insbesondere auch abgeschlossene Intervalle in $\mathbb{R}$, wie in 2d) .

Aufgabe 3

a) Man zeige: die durch $x_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ gegebene Folge ist monoton wachsend und nach oben beschränkt. (Also konvergent!)

b) Man zeige, daß für die Folge $\left(s_n\right)$ der Partialsummen der „alternierenden harmonischen Reihe“ $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}\frac{1}{i}$ folgendes gilt: $\forall n \in \mathbb{N}: \; s_{2n} < s_{2(n+1)} \; < \; s_{2n+1} < s_{2n-1}$.

Das heißt, daß die Folge der Partialsummen mit geradem Index monoton steigt und nach oben beschränkt ist, während die Folge der Partialsummen mit ungeradem Index monoton fällt und nach unten beschränkt ist. Offenbar konvergiert daher die Folge der geraden und der ungeraden Partialsummen und beide Grenzwerte sind gleich: daher ist die alternierende harmonische Reihe konvergent, im Gegensatz zur harmonischen Reihe.

c) Die geometrische Reihe konvergiert natürlich auch für komplexe Zahlen mit $|z|<1$, und es gilt: $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$. Man berechne für $z = 0{,}5 + 0{,}8i$ den Wert $\frac{1}{1-z}$ und die ersten 10 Partialsummen der geometrischen Reihe und trage sämtliche Werte in ein Bild der komplexen Ebene ein.