Mathematik I für Physiker und Elektrotechniker WS03/04
Aufgabenblatt 5

Wiederholung des Stoffs:
Sei *M* eine nicht-leere Menge, $d: M \times M \to \mathbb{R}_+$ eine Metrik auf *M*, also (M, d) ein metrischer Raum. Für $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ und $x \in M$ heißt die Menge $U_\varepsilon^d(x) := \{ y \in M \,|\, d(x, y) < \varepsilon \}$ „offene Kugel mit Radius ε um den Punkt *x* bezüglich der Metrik *d*. Wenn implizit klar ist, welche Metrik gemeint ist, so schreibt man nur $U_\varepsilon(x)$.

Auf dem $\mathbb{R}^n$ betrachtet man meist die durch $d(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$ gegebene „euklidische Metrik“, manchmal aber auch die durch $d(x, y) := \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$ gegebene „Taxifahrermetrik“.
Versuchen Sie, sich die offene Kugel mit Radius 1 um den Nullpunkt bezüglich der Taxifahrermetrik im $\mathbb{R}^3$ vorzustellen!

In $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ sind beide Metriken identisch, es ist dort $d(x, y) = |x - y|$.

Sei nun $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten eines metrischen Raums und $a \in M$. Man sagt, „die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen *a*“, oder „*a* ist Grenzwert der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$“, wenn
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 : \; x_n \in U_\varepsilon(a)$, bzw. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 : \; d(x_n, a) < \varepsilon$.
Man schreibt statt oder „*a* ist Grenzwert der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$“ auch kurz: $\lim_{n \to \infty} x_n = a$.

Ist $f: M \to N$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen und $x_0 \in M$, so heißt *f* „stetig in x_0“, wenn gilt: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \; f(U_\delta(x_0)) \subset U_\varepsilon(x_0)$, bzw.
$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \; \forall x \in M : \; d(x, x_0) < \delta \; \to \; d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.
f heißt stetig auf *M*, wenn *f* stetig in jedem Punkt von *M* ist.

Man kann unschwer zeigen:
f ist genau dann stetig in x_0, wenn für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in *M*, deren Grenzwert x_0 ist, die Folge der Bildpunkte $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ den Grenzwert $f(x_0)$ besitzt.

Außerdem gilt:

Sind $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen im metrischen Raum (M, d), so bilde man die Summen- und Produktfolge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}, (p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch $s_n := x_n + y_n$, $p_n := x_n \cdot y_n$. Gilt nun $\lim_{n \to \infty} x_n = a$, $\lim_{n \to \infty} x_n = b$, so auch $\lim_{n \to \infty} s_n = a + b$, $\lim_{n \to \infty} p_n = a \cdot b$. Gilt zusätzlich $\forall n \in \mathbb{N} : y_n \neq 0$ und $b \neq 0$, konvergiert die durch $q_n := \frac{x_n}{y_n}$ definierte Quotientenfolge $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$: $\lim_{n \to \infty} q_n = \frac{a}{b}$.

Das sogenannte „Archimedische Axiom“ für die reellen Zahlen besagt: zu jeder reellen Zahl gibt es eine größere natürliche Zahl. Daraus folgt umgekehrt, daß $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Von letzterer Tatsache kann man im Folgenden ausgehen.

Aufgabe 1

Man zeige: Ist $q \in \mathbb{R},\ 0 < q < 1$, so ist $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.
(Man muß zeigen, daß 0 Grenzwert der Folge $\left(q^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist. Dabei nutze man die Tatsache, daß die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ den Grenzwert 0 besitzt, sowie die Bernoullische Ungleichung.)

Aufgabe 2

Man betrachte im $\mathbb{R}^2$ die Euklidische Metrik $d(x,y) = \sqrt{\left(x_1 - y_1\right)^2 + \left(x_2 - y_2\right)^2}$ und die „Taxifahrermetrik“ $d_1(x,y) := |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$. Man zeige $U_1^{d_1}(0) \subset U_1^{d}(0) \subset U_2^{d_1}(0)$.
(In Worten: Die offene Kugel mit Radius 1 um den Nullpunkt bezüglich der Metrik d_1 ist Teilmenge der offenen Kugel mit Radius 1 um den Nullpunkt bezüglich der Metrik d, und diese wiederum ist Teilmenge der offenen Kugel mit Radius 2 um den Nullpunkt bezüglich der Metrik d_1.

Aufgabe 3

a) Man betrachte die durch $x_1 := 2,\ x_{n+1} := \frac{x_n{}^2 + 2}{2x_n}$ definierte Folge, sowie die durch $y_n = x_n{}^2$ gegebene Folge und zeige $\lim_{n\to\infty} y_n = 2$.
(Daher ist offenbar der Grenzwert der Folge $\left(x_n\right)$ gleich $\sqrt{2}$. Berechnen Sie z.B. x_{10} !)

b) Man setze $a_1 := 1,\ a_i := 2$ für $i > 1$, und betrachte dann die durch

$x_1 = a_1,\ x_2 = a_1 + \frac{1}{a_2},\ x_3 = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}},\ x_4 = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4}}}$, etc. definierte Folge $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ist diese Folge konvergent? Welches ist ihr Grenzwert?
(Beantworten Sie die Frage zunächst „experimentell“!)

Aufgabe 4

a) Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gegeben durch $f(x)=x^2$. Zeigen Sie: f ist stetig in 1.

b) Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gegeben durch $f(x)=\begin{cases}1 & \text{für } x\geq 0\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$. Zeigen Sie: f ist nicht stetig in 0.

c) Sei $\mathbb{R}_+^* := \{x\in\mathbb{R} \mid x>0\}$ und $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gegeben durch $f(x)=\dfrac{1}{x}$. Zeigen Sie: f ist stetig in 1 .