Mathematik I für Physiker und Elektrotechniker WS03/04
Aufgabenblatt 4

Aufgabe 1.

Nach dem in der Vorlesung beschriebenen Verfahren berechne man die Inversen von

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4,4}(\mathbb{Z}_2)$, wobei $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ der zweielementige Körper ist.

Aufgabe 2. Quaternionen

Im $\mathbb{R}^4$ setzen wir $1 := e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $i := e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $j := e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $k := e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und schreiben einen

Vektor $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ als $x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k$. Wir führen eine assoziative Multiplikation ein,

indem wir setzen: $i^2 := j^2 := k^2 := -1$ und $ij = k$. Damit ergibt sich z.B.
$ik = i(ij) = (ii)j = -j$ und $ij = k \to ijj = kj \to -i = kj \to 1 = kji \to k = kkji = -ji \to ij = -ji$.
Die Multiplikation ist also nicht kommutativ. Allgemein werden zwei Quaternionen $x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k$, $y_1 + y_2 i + y_3 j + y_4 k$ multipliziert, indem man gliedweise multipliziert, die reellen Koeffizienten vorzieht und die Produkte der *i*,*j*,*k* nach obigen Regeln auswertet.

Sei nun $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = a_1 + a_2 i + a_j + a_4 k \in \mathbb{R}^4$.

Die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $\varphi(x) := ax$ (Quaternionenmultiplikation mit a) ist linear und für $a \neq 0$ ein Isomorphismus.

Finden Sie die Matrixdarstellung von φ bezüglich der Basis $e_1, \ldots, e_4$!

Aufgabe 3.

Für das Rechnen mit Ungleichungen zwischen reellen Zahlen gelten folgende Rechenregeln:

$a \le b \ \vee \ b \le a$
$a \le b \ \wedge \ b \le a \quad \to \quad a = b$
$a \le b \wedge b \le c \quad \to \quad a \le c$
$a \le b \ \to a + c \le b + c$
$a \le b \wedge c \ge 0 \ \to \ ac \le bc$

Zeigen Sie:
a) $\forall x \in \mathbb{R}: \quad 0 \le x^2$
b) Ist $x \in \mathbb{R},\ x \ge -1$, so gilt $\forall n \in \mathbb{N}: \quad (1+x)^n \ge 1 + nx$ (Bernoullische Ungleichung) (Induktion!)
c) Für $x \in \mathbb{R}$ ist $|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \ge 0 \\ -x & \text{sonst} \end{cases}$. Zeigen Sie: $\forall x, y \in \mathbb{R}: \ |x+y| \le |x| + |y|$
d) Sei $d : M \times M \to \mathbb{R}_+$ eine Metrik auf M. Zeigen Sie, daß dann auch durch $\tilde{d}(x,y) := \dfrac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$ eine Metrik definiert wird. (Dabei ist natürlich nur der Nachweis der Dreiecksungleichung schwierig.)