Mathematik I für Physiker und Elektrotechniker WS03/04
Aufgabenblatt 3

Aufgabe 1.

Sei $U := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \begin{matrix} x+2y+3z+4w=0 \\ 2x+y-3z+w=0 \end{matrix} \right\}$. U ist ein Unterraum des $\mathbb{R}^4$. Man finde eine Basis von U und weise nach, daß die gewählten Vektoren tatsächlich linear unabhängig sind und ein Erzeugendensystem von U bilden.

Aufgabe 2.

Seien $u^1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, u^2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, w^1 := \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, w^2 := \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$,

$U := \left\langle u^1, u^2 \right\rangle := \left\{ \lambda_1 u^1 + \lambda_2 u^2 \,|\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$, $W := \left\langle w^1, w^2 \right\rangle := \left\{ \mu_1 w^1 + \mu_2 w^2 \,|\, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R} \right\}$.

U, W sind Unterräume von $\mathbb{R}^3$, damit ist auch $U \cap W$ ein Unterraum.

Man finde einen Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ ungleich dem Nullvektor, der in $U \cap W$ liegt und zeige, daß jeder andere Vektor $v' \in U \cap W$ sich in der Form $v' = \kappa v$ mit $\kappa \in \mathbb{R}$ schreiben läßt.

Aufgabe 3.

a) Sei K ein Körper und sei $q \in K, q \neq 1$. Man zeige durch Induktion $\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$

b) Man zeige durch Induktion: $\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$.

Aufgabe 4.

Sei $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Man definiere induktiv für $n \in \mathbb{N}_0$: $\binom{n}{0} := \binom{n}{n} := 1$ und für $1 \le m \le n$

$\binom{n+1}{m} := \binom{n}{m-1} + \binom{n}{m}$ und mache sich klar, daß damit $\binom{n}{m}$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$, $0 \le m \le n$

erklärt ist.

a) Ist R ein Ring mit kommutativer Multiplikation, $a, b \in R$ und $n \in \mathbb{N}$, so beweise man durch Induktion unter Benutzung obiger Formeln, daß $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$.

b) Man definiere induktiv 0!:=1, $(n+1)! := n!(n+1)$ und zeige dann durch Induktion über n daß $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.