Mathematik I für Physiker und Elektrotechniker WS03/04
Aufgabenblatt 2

Aufgabe 1.

a) Seien z=x+iy und w=u+iv zwei komplexe Zahlen. Man erinnere sich, daß $\overline{z} := x - iy$ und zeige: $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$.

b) Man finde $a, b \in \mathbb{R}$, so daß $a + bi = \dfrac{3+4i}{5+6i}$

c) Anhand der in der Vorlesung diskutierten geometrischen Interpretation der Multiplikation komplexer Zahlen der Länge 1 als Addition von Winkeln finde man ein z=x+iy, so daß $z^2 = zz = i$ und ein $w = u + iv$ so daß $w^3 = www = -1$. Machen Sie die Probe, d.h. rechnen Sie für die von Ihnen gefundenen komplexen Zahlen die beiden Gleichungen nach, und skizzieren Sie die Position der Punkte $z, w \in \mathbb{C}$ auf dem Einheitskreis.

Aufgabe 2

d) Berechnen Sie das Produkt $(a+bi)\cdot(c+di)$ in $\mathbb{C}$ und das Matrizenprodukt $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$ in $M_{2,2}(\mathbb{R})$. Was fällt auf?

Aufgabe 3

Man setze $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Für $m, n \in \mathbb{N}_0$ und $n > 0$ sei $m\%n$ der Rest, der bei Division von m durch n bleibt, z.B. $16\%6 = 4$. Auf der Menge $\mathbb{Z}_n := \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ definiert man zwei Operationen $\oplus, \otimes$ durch $a \oplus b := (a+b)\%n$ und $a \otimes b := (ab)\%n$. Mit diesen Operationen ist $\mathbb{Z}_n$ jedenfalls ein Ring mit 0 als neutralem Element der Operation $\oplus$ und 1 als neutralem Element der Operation $\otimes$.

Untersuchen Sie nun alle Elemente von $\mathbb{Z}_{21}$ daraufhin, ob sie ein multiplikativ Inverses besitzen und finden sie es, falls es eines gibt. Stellen Sie die Ergebnisse in einer Tabelle dar. Kann man einem Element von $\mathbb{Z}_{21}$ „ansehen", ob es ein multiplikativ Inverses besitzt?

Aufgabe 4

a) Man zeige, daß die Gruppe der Permutationen vom Grad 3 nicht kommutativ ist.

b) Eine Permutation $\tau \in \mathfrak{S}_n$ heißt Transposition, wenn es $i, j \in \mathbb{N}_n$ gibt, $i < j$, so daß $\tau(i) = j,\ \tau(j) = i$ und $\tau(k) = k$ für $k \neq i, j$. Man benutzt die Notation $[i, j]$ für so eine Transpostion. Man stelle nun die Permutation $(5,3,7,9,6,8,2,4,1) \in \mathfrak{S}_9$ als Produkt (also Hintereinanderausführung) von Transpositionen dar. (Z.B. gilt in $\mathfrak{S}_3$ $(2,3,1) = [1,3] \circ [1,2]$.)