Mathematik I für Physiker und Elektrotechniker WS03/04
Aufgabenblatt 12

Aufgabe 1 (Extremwerte mit Nebenbedingungen)

Sei $f(x,y) = x^2 + xyz + y^2$, $g(x,y) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + z^2$ -1 und $E = \{(x,y,z) \mid g(x,y,z) = 0\}$ der als Nullstellengebilde von g gegebene Ellipsoid.

In welchen Punkten des Ellipsoiden sind die Gradientenvektoren ∇f und ∇g linear abhängig? (Das sind die kritischen Punkte von f auf E). Man entscheide, ob in diesen kritischen Punkten auf E lokale Maxima oder lokale Minima vorliegen. Da E beschränkt und abgeschlossen ist, gibt es für die stetige Funktion f auf E garantiert ein Maximum und ein Minimum, und diese müssen kritische Punkte sein. Welcher der kritischen Punkte ist das Maximum, welcher das Minimum?

Skizzieren Sie auf einem Ei die Höhenlinien von f, also diejenigen Linien auf der Flächen, auf denen f konstant ist.

Aufgabe 2

Seien $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar, soll heißen differenzierbar in einem etwas größeren offenen Intervall. Dann besagt der **1. Mittelwertsatz**:

$$\exists \xi \in \left]a,b\right[: \quad \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(\xi)$$

Sei eine weitere differenzierbare Abbildungen $g:[a,b] \to \mathbb{R}$ gegeben mit $g(b) \neq g(a)$ und $g'(x) \neq 0$ in $\left]a,b\right[$. Man zeige, dass es dann ein $\xi \in \mathbb{R}$, $a < \xi < b$ gibt mit $g'(\xi) \neq 0$ und

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Diese Aussage heißt „***2. Mittelwertsatz***" .

Hinweis: Man wende den 1. Mittelwertsatz auf die folgende Funktion an:
$h(x) := f(x)\big(g(b) - g(a)\big) - g(x)\big(f(b) - f(a)\big)$.

Aufgabe 3.

Der 2. Mittelwertsatz ist ein nützliches technisches Hilfsmittel. Beispielsweise folgt aus ihm sofort die folgende

Regel von L'Hôpital:
Seien f, g in einem offenen Intervall um den Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ diffbar und $f(x_0) = g(x_0) = 0$.
Existiert $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, so auch $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, und es gilt $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

Man berechne mit Hilfe der Regel von L'Hôpital folgende Grenzwerte:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\frac{x^2}{2}+\log(1-x)}{x^3},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\exp(x)-1}{x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x^2},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\exp(x)-1-x-\frac{x^2}{2}}{x^3}$$

Man beachte, dass in den beiden letzten Beispielen die Regel mehrfach angewandt werden muß, um zum Ergebnis zu kommen.

Aufgabe 4. Numerisches Verfahren zur Berechnung lokaler Extremwerte

Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar. Das folgende Iterationsverfahren findet ein lokales Maximum (Minimum) $x_0 \in U$, wenn es existiert und wenn man als Startpunkt der Iteration einen Punkt $x_1 \in U$ wählt, der bereits nahe genug am lokalen Extremwert liegt. Die Rekursionsformel lautet: $x_{n+1} = x_n + \nabla f(x_n)$ für ein lokales Maximum, $x_{n+1} = x_n - \nabla f(x_n)$ für ein lokales Minimum.

Man teste dieses Verfahren für die vom letzten Aufgabenzettel bekannte Funktion $f(x,y) = x^4-2x^3+2x^2+2x^2y^2-2x^2y-2xy^2+2y^2-2y^3+y^4$.