Mathematik I für Physiker und Elektrotechniker WS03/04
Aufgabenblatt 11

Aufgabe 1

Es sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, a) $f(x)=(\sin(x))^5$, b) $f(x)=\exp(x^3\sin(x))$, c) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.
Durch Anwendung von Differentiationsregeln berechne man jeweils $f'(x)$.

Aufgabe 2

Sei $U :=]0,\infty[\times]0,2\pi[$ und $\varphi : U\to\mathbb{R}^2$ gegeben durch $\varphi\begin{pmatrix} r\\ \theta\end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r\cos(\theta)\\ r\sin(\theta)\end{pmatrix}$. Man berechne für $\begin{pmatrix} r_0\\ \theta_0\end{pmatrix}\in U$ die Ableitungsmatrix $D\varphi\begin{pmatrix} r_0\\ \theta_0\end{pmatrix}$ und zeige unter Nutzung der Formel $\sin^2(\theta)+\cos^2(\theta)=1$, dass der Rang dieser Matrix immer 2 ist.

Aufgabe 3

a) Sei φ die Abbildung aus Aufgabe 4, $I =]-\pi,\pi[$ und $c : I\to\mathbb{R}^2$ die Kurve im $\mathbb{R}^2$, die durch
$c(\theta) := \varphi\begin{pmatrix} 1+\cos(\theta)\\ \theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta)(1+\cos(\theta))\\ \sin(\theta)(1+\cos(\theta))\end{pmatrix}$ gegeben ist.

b) In der Darstellung $c=\begin{pmatrix} c_1\\ c_2\end{pmatrix}$ sind die Komponentenfunktionen c_1, c_2 oben konkret hingeschrieben. Man berechne den Tangentialvektor $c'(\theta)=\begin{pmatrix} c_1'(\theta)\\ c_2'(\theta)\end{pmatrix}$ an die Kurve im Punkt $c(\theta)$.

c) Man stelle die obige Kurve und den errechneten Tangentialvektor in mehreren Punkten graphisch dar.

d) Definiert man die Kurve $\gamma : I\to\mathbb{R}^2$ durch $\gamma(\theta) := \begin{pmatrix} 1+\cos(\theta)\\ \theta\end{pmatrix}$, so ist offenbar $c=\varphi\circ\gamma$, also kann man den Tangentialvektor $c'(\theta)$ in einem Punkt $c(t)$ der Kurve c durch Anwendung der Kettenregel $c'(\theta) = D\varphi\big(\gamma(\theta)\big)\circ\gamma'(\theta) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial r}\big(\gamma(\theta)\big) & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\theta}\big(\gamma(\theta)\big)\\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial r}\big(\gamma(\theta)\big) & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\theta}\big(\gamma(\theta)\big)\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} \gamma_1'(\theta)\\ \gamma_2'(\theta)\end{pmatrix}$ berechnen.

Man tue dies und vergleiche das Ergebnis mit dem in b) gewonnenen.

Aufgabe 4.

Sei $f(x,y) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 2x^2y^2 - 2x^2y - 2xy^2 + 2y^2 - 2y^3 + y^4$.

a) Finden Sie alle Punkte $(x_0, y_0)\in\mathbb{R}^2$ mit $Df(x_0,y_0)=0$ (kritische Punkte von *f*).

b) Stellen Sie irgendwie fest, ob es sich bei diesen Punkten um lokale Maxima oder Minima handelt, ggf. auch nur dadurch, daß Sie ein Bild des Graphen von *f* herstellen.