Mathematik I für Physiker und Elektrotechniker WS03/04
Aufgabenblatt 10

Aufgabe 1.
a) Die Abbildung $\cos :]0,\pi[\to]-1,1[$ ist bijektiv. Die Umkehrabbildung $]-1,1[\to]0,\pi[$ heißt $\arccos$. Mit Hilfe des Satzes über die Umkehrfunktion berechne man $\arccos'(x)$.

b) Die Abbildung $f : \mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \to \mathbb{R}_+^*,\ f(x) := x^n\ (n \geq 2)$ ist bijektiv. Die Umkehrfunktion bezeichnet man vernünftigerweise mit $g(x) =: x^{\frac{1}{n}}$. Mit Hilfe des Satzes über die Umkehrfunktion bereche man die Ableitung von *g*.

c) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R},\ x > 0$ setze man $x^\alpha := \exp(\alpha \log x)$. Man überlege zunächst, daß für $\alpha = n \in \mathbb{N}$ diese Definition mit der bereits bekannten übereinstimmt und zeige auch, daß $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$, $\left(x^\alpha\right)^\beta = x^{\alpha\beta}$, $x^\alpha y^\alpha = (xy)^\alpha$. Schließlich berechne man mittels Kettenregel noch die Ableitung von $f(x) = x^\alpha$

Aufgabe 2.
Auf $\mathbb{R}^2$ betracht man das durch $X(x,y) = (-y,x)$ gegebene Vektorfeld. Machen Sie eine Skizze des Vektorfelds.

a) Zeigen Sie, daß durch $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ eine Stromlinie des Vektorfelds gegeben ist, die durch den Punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ geht. Machen Sie sich ein Bild dieser Stromlinie.

b) Geben Sie eine Stromlinie an, die durch den Punkt $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ geht.

Aufgabe 3.
Sei $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ die Einheitssphäre, also $S^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}$ und sei $N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ der „Nordpol“ der Sphäre. Für jeden Punkt $p = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ betrachten wir den entsprechenden Punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ in der (x,y)-Ebene des $\mathbb{R}^3$ und legen eine Gerade durch diesen Punkt und den Nordpol der Einheitssphäre. Offenbar schneidet diese Gerade die Einheitssphäre in genau einem weiteren Punkt, den wir $\varphi(p)$ nennen. Wir haben also eine bijektive Abbildung

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \left(S^2 - \{N\}\right)$ [1,2] .

a) Man gebe eine Formel für $\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x,y) \\ \varphi_2(x,y) \\ \varphi_3(x,y) \end{pmatrix}$ an und berechne die Ableitung

$$D\varphi\left(x,y\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

b) Für $(x,y) = (5,7)$ berechne man den zugehörigen Punkt $\varphi(x,y) \in S^2$, zeige, daß die Spaltenvektoren der Matrix $D\varphi\left(x,y\right)$ linear unabhängig sind und überprüfe, daß sie tangential zur Sphäre im Punkt $\varphi(x,y)$ liegen , indem man nachsieht, ob ihr Skalarprodukt mit dem „Radiusvektor" $\varphi(x,y)$ Null ist.

---

[1] Als Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ist φ natürlich nur noch injektiv, nicht mehr surjektiv.

[2] Die Umkehrabbildung $S^2 - \left\{N\right\} \to \mathbb{R}^2$ heißt *stereographische Projektion*.