Bemerkungen zu Aufgabe 3a)

1. Wir betrachten die in der Aufgabe durch $y_1 := 4,\ y_{n+1} := \frac{(y_n+2)^2}{4y_n}$ rekursiv definierte Folge und möchten zeigen, daß sie den Grenzwert 2 hat. Dies ist offenbar gleichbedeutend damit, daß die durch $z_n := y_n - 2$ definierte Folge den Grenzwert 0 besitzt. Setzen wir nun weiterhin $w_n := \frac{1}{z_n}$, so können wir einfach nachrechnen, daß $w_{n+1} = 4w_n^2 \frac{2w_n+1}{w_n} \geq 8w_n^2$. Da wir mit dem Startwert $w_1 = \frac{1}{2}$ beginnen, ergibt sich induktiv für $n \geq 2$: $w_n \geq 2^n$. Damit ist $0 \leq z_n \leq \frac{1}{2^n}$.

Da wir bereits wissen, daß die Folge $\left(\frac{1}{2^n}\right)$ konvergent mit Grenzwert 0 ist, können wir zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ finden, so daß $|y_n - 2| = z_n \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ ist. Dies ist aber genau die Aussage, daß die Folge (y_n) den Grenzwert 2 besitzt.

2. Hätten wir schon vorher gewußt, daß die Folge (y_n) einen Grenzwert $a>0$ besitzt, wäre seine Berechnung einfach gewesen. Aus der rekursiven Definition von (y_n) folgt offenbar mit Hilfe der Sätze über das Rechnen mit konvergenten Folgen, daß $a = \frac{(a+2)^2}{4a}$, also $4a^2 = a^2 + 4a + 4$, also $a^2 - \frac{4}{3}a - \frac{4}{3} = 0$, also $a_{1,2} = \frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{3}} = \frac{2}{3} \pm \frac{4}{3}$. Da wir von $a>0$ ausgehen, ist $a=2$ die einzige positive Lösung dieser Gleichung und damit der Grenzwert.

3. In der Vorlesung haben wir inzwischen auch gesehen, daß eine monoton fallende, nach unten beschränkte Folge einen Grenzwert besitzen muß. Man zeigt leicht induktiv, daß $1 < y_{n+1} < y_n$, so daß obiges zweites Argument mit der quadratischen Gleichung anwendbar gewesen wäre. Zur Zeit der Aufgabenstellung war aber jedenfalls die Argumentation in 1 anwendbar.

Man formuliere also jetzt die in 1. gegebenen Hinweise aus!