Höhere Mathematik II, SS2014
M. Hortmann

Klausurrelevante Fragen zum Vorlesungsstoff ab Ende Juni.

I

1. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in U$, und $X: U \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld.
Was ist eine "Stromlinie von X durch den Punkt x_0 ".

2. Geben Sie eine kurze Beschreibung des Eulerverfahrens zur numerischen Berechnung einer solchen Stromlinie.

3. Sei $a \in \mathbb{R}^n$ und das Vektorfeld $X: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ habe den konstanten Wert a.
Geben Sie eine Stromlinie dieses Vektorfeldes durch de Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ an und rechnen Sie dann nach, daß die von Ihnen angebene Kurve tatsächlich eine Stromlinie durch x_0 ist!

4. a) Geben Sie ein Vektorfeld im $\mathbb{R}^2$ an, dessen Stromlinien Kreise um den Nullpunkt sind.
b) Geben Sie ein Vektorfeld im $\mathbb{R}^2$ an, dessen Stromlinien Kreise um den Punkt $(1,2)$ sind.
c) Geben Sie ein Vektorfeld im $\mathbb{R}^3$ an, dessen Stromlinien Kreise um die z-Achse sind.
(Es gibt einen "Satz vom gekämmten Igel", der besagt, daß es kein stetiges Vektorfeld im $\mathbb{R}^3$ gibt, dessen Vektoren sämtlich von 0 verschieden sind, und dessen Stromlinien Kreise um den Nullpunkt sind. Machen Sie sich dies anschaulich klar?)

5. Sei $y'(x) = A(x)y$ ein homogenes lineares Differentialgleichungssystem.
a) Wann heißt eine Abbildung $\Phi: [-\epsilon, \epsilon] \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ Fundamentallösung des Systems?
b) Wie können Sie eine Fundamentallösung benutzen, um das inhomogene System $y'(x) = A(x)y + b(x)$ zu lösen?

c) Nennen Sie eine Fundamtentallösung eines Systems $y'(x) = Ay$ mit konstanten Koeffizienten.
d) Finden Sie eine Fundamentallösung für die homogene lineare Differentialgleichung $y' = 3y$ (auffaßbar als 1x1-System). Lösen Sie dann die inhomogene Gleichung $y' = 3y + \cos(x)$

6. a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, sowie eine Basis des $\mathbb{R}^2$, die durch Eigenvektoren dieser Matrix gebildet wird..

b) Betrachten Sie das zur obigen Matrix gegebene homogene Differentialgleichungssystem $y' = Ay$.
Nehmen Sie einen der eben errechneten Eigenwerte λ und einen zugehörigen Eigenvektor x und rechnen Sie die Lösung $\exp(tA)x$ konkret aus!

c) Seien A,B zwei quadratische reelle oder komplexe Matrizen.
Unter welcher Bedingung gilt $\exp(A+B) = \exp(a) \cdot \exp(B)$?

d) Berechnen Sie die Eigenwerte der folgenden Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

e) Sei λ einer der Eigenwerte dieser Matrix. Berechnen Sie eine Basis des $\mathbb{R}^2$, deren einer Vektor im Eigenraum E^1_λ und deren zweiter Vektor im verallgemeinerten Eigenraum E^2_λ liegt.

f) Betrachten Sie das zugehörige homogene Differentialgleichungssystem $y'=Ay$.
Nehmen Sie den eben errechneten Eigenwert λ und einen beliebigen Vektor $x\in\mathbb{R}^2$ und rechnen Sie die Lösung $\exp(tA)x$ konkret aus! (Hilfreich: welcher Unterraum von $\mathbb{R}^2$ ist E_λ^2 ?)

g) Sei $A\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ seien zwei verschiedene Eigenwerte dieser Matrix, und $x_1, x_2\in\mathbb{R}^n$ zwei zugehörige Eigenvektoren. Zeigen Sie: x_1 und x_2 sind linear unabhängig!

h) Sei $U\subset\mathbb{R}^2$ offen, $f, g, h: U\to\mathbb{R}$ seien stetige Funktionen und $y''(x)=f(x,y)y'(x)+g(x,y)y(x)+h(x,y)$ sei eine Differentialgleichung zweiter Ordnung. Wie kommen Sie von dieser Gleichung zu einem äquivalenten System erster Ordnung? Wie führt eine Lösung dieses Systems zu einer Lösung der Ausgangsgleichung?

II

7. Nennen Sie die definierenden Eigenschaften eines hermitischen Produkts auf einem Vektorraum über $\mathbb{C}$.

8. a)Wir hatten den komplexen Vektorraum $\ell_2^{\mathbb{Z}}:=\left\{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \middle| \forall n\in\mathbb{Z}: a_n\in\mathbb{C} \text{ und } \sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|^2<\infty\right\}$ kennengelernt und auf diesem ein hermitisches Produkt. Wie war dieses definiert?

b) In der eben nachgefragten Definition kommt eine Reihe vor. Warum ist diese konvergent?

9. a) Was ist eine antihermitische Matrix?
b) Was ist eine unitäre Matrix? c) Wann liegt eine unitäre *n*x*n*-Matrix in der Gruppe SU(n)?
d) Geben Sie ein Beispiel für eine antihermitische 2x2-Matrix, in der kein Koeffizient reell ist.

10. a) Sei A eine antisymmetrische reelle Matrix. Warum ist exp(A) orthogonal?
b) Sei A eine antihermitische Matrix. Wieso ist exp(A) unitär?
c) Warum hat ein Eigenwert einer unitären Matrix den Betrag 1?

11. a) Den Vektorraum der integrierbaren komplexwertigen Funktionen auf dem reellen Intervall [a,b] hatten wir mit $\mathscr{L}_2[a,b]$ bezeichnet. Geben Sie für $f, g\in\mathscr{L}_2[a,b]$ die Definition des dort betrachteten hermitischen Produkts $<f,g>$.

b) Rechnen Sie nach: die Funktionen $f_n(x):=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(inx)$ ($n\in\mathbb{Z}$)bilden ein Orthonormalsystem bezüglich dieses hermitischen Produkts. Sie müssen also zeigen $<f_n, f_m>=\delta_{nm}$.

c) Berechnen Sie die Ableitung der Funkion $(1-inx)\frac{\exp(inx)}{n^2}$.
(Es handelt sich um Abbildung $\mathbb{R}\to\mathbb{C}$; Sie dürfen trotz der komplexen Ausdrücke Summen- und Produktregel und Kettenregel benutzen wie bei einer Abbildung $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.)

d) Schreiben Sie die Funktion $f(x)=x$ als Fourierreihe $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\exp(inx)$, d.h. berechnen Sie die zugehörigen Fourierkoeffizienten (c_n). Zur Evaluierung der dabei auftretenden Integrale benutzen

Sie das Ergebnis der vorherigen Aufgabe.

e) Benutzen Sie dieses Ergebnis, um $f(x)$ als Reihe in den Funktionen $\cos(nx)$ und $\sin(nx)$ zu schreiben.

f) Zusatzaufgabe außerhalb des Klausurkontexts:
Plotten Sie einige Partialsummen dieser Reihe und verfolgen Sie visuell, wie die Funktion $f(x)=x$ im Intervall $[0,2\pi]$ durch diese "Schwingungen" approximiert wird.

III
12. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f: U \to \mathbb{C}$. Wann heißt f in U komplex differenzierbar?

13. Ist $f: U \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, so erfüllt f, aufgefaßt als Abbildung $\mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}^2$ die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. Wie lauten diese?

14. a) Zeigen Sie, daß die Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die durch $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$ gegeben ist, die Cauchy-Riemann Gleichungen erfüllt.
b) Schreiben Sie f als komplexes Polynom!

15. Rechnen Sie nach: die Funktion $(x, y) \mapsto x^4 - 6x^2 y^2 + y^4$ ist harmonisch!
Finden Sie eine komplex-differenzierbare Funktion, deren Realteil die obige Funktion ist, sodann eine komplex-differenzierbare Funktion, deren Imaginärteil die obigen Funktion ist.

16.Berechnen Sie das komplexe Kurvenintegral $\int_\gamma \frac{1}{z} \mathrm{d}z$, wobei die Kurve γ den Einheitskreis einmal durchläuft.

17. Sei $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) := \bar{z}$. Berechnen Sie $\frac{\partial f}{\partial z}$!

18. Zeichnen Sie eine Skizze einer Kurve im $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, deren Windungszahl um den Punkt z_0 gleich 1 und deren Windungszahl um den Punkt z_1 gleich zwei ist.