Höhere Mathematik II, SS2014
M. Hortmann

Fragen zur Klausurvorbereitung

Die folgenden Fragen beziehen sich auf bisherigen Stoff der Vorlesung, den Sie für die Klausur beherrschen sollten.

Dieser Zettel wird nicht korrigiert. Sie brauchen daher auch keine Lösungen abzugeben.
Diskutieren Sie die Fragen untereinander und in den Tutorien.

1.
Was ist ein Banachraum?

Sei $T: E \to F$ eine stetige lineare Abbildung zwischen Banachräumen.
Wie ist die Norm $\|T\|$ definiert?
Was ist die Norm der linearen Abbildung $(x, y) \to (2x, 3y)$?
Was ist die Norm der linearen Abbildung $(x, y, z) \to x + 2y + 3z$?

Sei E ein Banachraum.
Wann heißt eine Teilmenge $U \subset E$ offen?
Wann heißt eine Teilenge $U \subset E$ beschränkt?
Wann heißt eine Teilmenge $U \subset E$ abgeschlossen?
Auf was für Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ nimmt eine stetige Funktion ein Maximum und ein Minimum an?

2.
Seien E,F Banachräume, $U \subset E$ offen, $f: U \to E$, $x_0 \in U$

Was bedeutet die Schreibweise $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$?
Was heißt: f ist stetig in x_0 ?
Was heißt: f ist differenzierbar in x_0 ?
Was heißt f ist stetig differenzierbar in x_0 ?
Welchen Wert hat die Ableitung $Df(x_0)$, wenn die Abbildung f konstant ist?
Welchen Wert hat die Ableitung $Df(x_0)$, wenn die Abbildung f eine stetige lineare Abbildung ist?
Warum sind alle linearen Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig?

Formulieren Sie die Kettenregel der Differentialrechnung.

Seien $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f = (f_1, \ldots, f_m)^t : U \to V$ [1] $g: V \to \mathbb{R}$ seien differenzierbar, es sei $x_0 \in U$ und $y_0 = f(x_0)$.
Drücken Sie die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial x_j}(g \circ f)(x_0)$ durch eine geeignete Summe von Produkten der $\frac{\partial g}{\partial y_i}(y_0)$ und der $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)$ [2] aus.

---

1 Eigentlich müßte ich $(f_1, \ldots, f_m)$ als Spaltenvektor schreiben. Dies drücke ich, um Platz zu sparen, durch die "Transponierung" aus, also durch $(f_1, \ldots, f_m)^t$

2 Dies ist eine Konkretisierung der Kettenregel

Seien $f, g : U \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in U$ differenzierbar. Geben Sie Formeln an für $D(f+g)(x_0)$ und $D(f \cdot g)(x_0)$ sowie für $\frac{\partial}{\partial x_i}(f \cdot g)(x_0)$.

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}^m$ diffenzierbar.
Geben Sie (abstrakt) die Jacobi-Matrix[3] an, welche die Ableitung $Df(x_0)$ [4] beschreibt.

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in U$, $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar.
Definieren Sie die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ als Grenzwert eines Differenzenquotienten.
Welche Bedingung brauchen Sie, um aus der Existenz der partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ auf der Menge *U* auf die Existenz der Ableitung *Df* auf *U* zu schließen?

Sei $v \in \mathbb{R}^n$. Definieren Sie die Richtungsableitung $\partial_v f(x_0)$.
Definieren Sie den Begriff Gradientenvektor $\nabla f(x_0)$.
Welchen Schluß ziehen Sie aus der Kenntnis von $\nabla f(x_0)$ in Bezug auf das Wachstumsverhalten der Funktion *f*?

Berechnen Sie die Ableitungsmatrix für die Funktion $f(x, y, z) = x^2 \sin(y^2) + z^2$.

Berechnen Sie tan'(*x*).

Sei $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie die Fundamentalgleichung für die Exponentialfunktion, indem Sie für die Funktion $f(x) = \frac{\exp(x+a)}{\exp(x) \cdot \exp(a)}$ die Ableitung berechnen[5].

Setzen Sie für $0 < x < \pi$ $f(x) := \log(\sin^2(x))$ und berechnen Sie *f* '(*x*).

3.
Wie lautet der Satz von Rolle?
Beweisen Sie den Satz von Rolle.
Wie lautet der Mittelwertsatz?
Beweisen Sie den Mittelwertsatz mit Hilfe des Satzes von Rolle.
Wie lautet der zweite Mittelwertsatz?
Wie lautet eine (es gibt mehrere) der Regeln von l'Hopital?
Berechnen Sie mit l'Hôptial den Grenzwert $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2}$

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall $f : I \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar, x_0 in I.
Begründen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes, warum
a) aus $f' \equiv 0$ auf *I* folgt, daß *f* konstant ist.
b) aus *f* '>0 auf *I* folgt, daß *f* streng monoton steigend ist.
Wie sieht die Taylorreihe von *f* in in $x_0 \in I$ aus?
Wie lautet die Taylorformel mit Restglied für *f*?

---

3 Wir haben auch den Begriff "Ableitungsmatrix" benutzt.
4 bezüglich der kanonischen Basen auf $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$
5 Dabei dürfen Sie natürlich die Fundamentalgleichung nicht benutzen.

4.
Wann heißt eine symmetrische reelle nxn-Matrix positiv definit?
Wie lautet das "Nordwest-Kriterium" für positive Definitheit?
Beweisen Sie das "Nordwest-Kriterium" für reelle symmetrische 2x2-Matrizen.
Zeigen Sie, daß die Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ positiv definit ist.
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \to \mathbb{R}$, $x_0 \in U$ [6].
Definieren Sie, was es heißt, daß f in x_0 ein lokales Maximum besitzt.

Sei zusätzlich f differenzierbar. Geben Sie eine notwendige Bedingung für das Vorliegen eines lokalen Maximums von f an der Stelle x_0 an.

Sei f zweimal stetig differenzierbar. Geben Sie eine hinreichende Bedingung für das Vorliegen eines lokalen Minimums an der Stelle x_0.

Finden sie alle Extremstellen der Funktion $f(x, y, z) = (2\mathrm{x}^2 + 4\mathrm{y}^2)\exp(-x^2 - y^2)$.
Bestimmen sie, ob es sich um lokale Maxima oder Minima handelt.

5.
Berechnen Sie das Integral $\int_0^1 x \, \mathrm{d}x$ als Grenzwert von Riemann-Summen.
Wie lautet der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung?
Formulieren Sie die Regel über die partielle Integration.
Formuieren Sie die Substitutionsregel der Integralrechnung.

Finden Sie eine Stammfunktion von log(x).
Berechnen Sie das Integral $\int_0^{\pi} x \sin(x) \, \mathrm{d}x$.
Berechnen Sie das Integral $\int_0^{\pi/4} \frac{1}{1 - \sin^2 x} \mathrm{d}x$.
Berechnen Sie das Integral $\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 3\mathrm{x} + 2} \mathrm{d}x$.
Berechnen Sie das Integral $\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 2\mathrm{x} + 3} \mathrm{d}x$ (andere Methode notwendig als in der vorigen Aufg.)

6.
Zeigen Sie: die Differentialform dx+ydy ist exakt.
Zeigen Sie: die Differentialform dx+ydy ist geschlossen[7].

Berechnen Sie das Wegintegral $\int_\gamma \alpha$ für $\alpha = y^2 \, \mathrm{d}x + x^2 \, \mathrm{d}y$ für irgendeinen Weg von (0,0) nach (1,1).
Können Sie damit rechnen, daß bei allen Wegen mit demselben Anfangs- und Endpunkt derselbe Wert herauskommt?

---

6 f wird zunächst nicht als differenzierbar vorausgesetzt.
7 Prüfen Sie die Definitionsbedingung nach; benutzen Sie nicht die Antwort auf die vorige Frage.

7.
Berechnen Sie die Funktionaldeterminante (also die Determinante der Ableitungsmatrix) für die Abbildung $\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$

Berechnen Sie mit Hilfe eines geeignet Doppelintegrals die Fläche des Dreiecks mit den Ecken (0,0),(2,1),(1,2). Zeichnen Sie dazu zunächst eine Skizze, damit die Grenzen des Dreiecks klar sind.

Sei n eine positive reelle Zahl. Das Quadrat $[0,n]\times[0,n]$ enthält den Viertelkreis K_n um den Nullpunkt mit Radius n und ist enthalten im Viertelkreis um den Nullpunkt mit Radius $2n$ [8].

Setzen Sie $a_n := \int\limits_{x=0}^{2^n} \exp(-x^2)\,\mathrm{d}\,x$. Für dieses Integral finden Sie keine Stammfunktion.

Schreiben Sie unter Ausnutzung der Fundamentalgleichung für die Exponentialfunktion

$$a_n^2 := \left(\int\limits_{x=0}^{n} \exp(-x^2)\,\mathrm{d}\,x\right)\cdot\left(\int\limits_{y=0}^{n} \exp(-y^2)\,\mathrm{d}\,y\right) = \int\int_{[0,n]\times[0,n]} \exp(-(x^2+y^2))\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\ .$$

Offenbar ist die Folge a_n und damit auch die Folge (a_n^2) monoton steigend.

Setzen wir $b_n := \int\int_{K_n} \exp(-(x^2+y^2))\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$, so ist auch die Folge b_n monoton steigend, und offenbar gilt $a_n^2 \le b_n \le a_{n+1}^2$. Falls also die Folge b_n konvergiert und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, so konvergiert auch die Folge a_n mit Grenzwert $\sqrt{b}$. Offenbar kann man den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{b}$ auch schreiben als $\int\limits_0^\infty \exp(-x^2)\,\mathrm{d}\,x$.

Der Witz ist jetzt, daß man das Integral b_n berechnen kann mit Hilfe der Integraltransformationsformel und Polarkoordinatentransformation.

Berechnen Sie also b_n [9] und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ und damit $\int\limits_0^\infty \exp(-x^2)\,\mathrm{d}\,x$ [10].

---

8 Genauer sogar: im Kreis mit Radius $n\sqrt{2}$

9 Nur dies ist hier der klausurrelevante Teil.

10 Dieser Trick steht in jedem Analysisbuch. Die Funktion $\exp(-x^2)$ (Glockenkurve) ist wichtig in Wahrscheinlichkeitstheorie und Quantenmechanik