Höhere Mathematik II, SS2014
M. Hortmann

Blatt 10

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Lösungen

<table>
<tr><th colspan="9">Namen</th><th>Gruppennr.</th><th>Tutor</th></tr>
<tr><td colspan="9"></td><td rowspan="4"></td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td colspan="9"></td></tr>
<tr><td colspan="9"></td></tr>
<tr><td colspan="9"></td></tr>
<tr><td>1a</td><td>b</td><td>c</td><td>d</td><td>2</td><td>3a</td><td>b</td><td>c</td><td>d</td><td>Summe</td><td>bearbeitet</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>3</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>7 Punkte=100%</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Aufgabe 1

Sei $A := \begin{pmatrix} 739 & 190 & 718 & 631 & 339 \\ -261 & -59 & -223 & -220 & -134 \\ -85 & -25 & -95 & -74 & -33 \\ -461 & -116 & -437 & -392 & -217 \\ -422 & -111 & -421 & -362 & -188 \end{pmatrix}$

a) Benutzen Sie ein geeignetes Computeralgebraprogramm, z.B. Pari, zur Berechnung des charakteristischen Polynoms und zeigen Sie, daß die Matrix nur einen einzigen Eigenwert λ besitzt.

b) A priori gilt $E_\lambda^1 \subset E_\lambda^2 \subset E_\lambda^3 \subset E_\lambda^4 \subset E_\lambda^5 = \mathbb{R}^5$.
Zeigen Sie, daß hier bereits gilt: $E_\lambda^3 = \mathbb{R}^5$.
Auch hier sollten Sie ein Computeralgebraprogramm benutzen, z.B. Pari, um u.a. die Matrix $(A - \lambda E)^3$ zu berechnen.

c) Berechnen Sie eine Basis von E_λ^1, ergänzen Sie sie zu einer Basis von E_λ^2, diese zu einer Basis von E_λ^3. Auch hier bietet es sich an, ein Computeralgebraprogramm zu benutzen. [1]

d) Wie können Sie der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sofort die Dimensionen aller verallgemeinerten Eigenräume ansehen? Welches sind die Dimensionen?

---

1 In Pari sind in diesem Zusammenhang die Befehle `matker` und `matinverseimage` nützlich.

Aufgabe 2

Betrachten Sie das inhomogene lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 + \sin t \\ y_2' &= -y_1 + 2y_2 + \cos t \end{aligned}$$ und finden Sie die Lösung mit *c*(*t*) mit $c_1(0)=1$, $c_2(0)=1$.

Hinweise:
Sie müssen zunächst eine Fundamentallösung für das homogene System finden:
Falls Sie $\exp(tA)$ berechnen können, hätten Sie dies geschafft.

Ansonsten greifen Sie zur Eigenwerttheorie:
Die Systemmatrix $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ besitzt einen doppelten Eigenwert λ. Man muß also zunächst eine geeignete Basis v_1, v_2 des $\mathbb{R}^2$ finden , für die die beiden Lösungen $\exp(tA)v_1$ und $\exp(tA)v_2$ ausgerechnet werden können. Z.B. wähle man $v_1 \in \ker(A-\lambda E)$ und $v_2 \in \ker(A-\lambda E)^2$.

Mit dem Ansatz "Variation der Konstanten" berechnen Sie eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems. Durch Addition einer Linearkombination von (z.B. den obigen) Lösungen des homogenen Systems können Sie dann die Anfangsbedingung befriedigen.

Aufgabe 3

Sei $v \in \mathbb{R}^3$ ein Vektor der Länge 1. Betrachten Sie folgendes Vektorfeld im $\mathbb{R}^3$: $X(x) := v \times x$ [2].

a) Wie sieht die Matrix aus, für die gilt $v \times x = Ax$?
b) Wir haben also *X*(*x*)=*Ax*. Stromlinien des Vektorfelds zu finden ist also äquivalent dazu, ein lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten zu lösen.
Berechnen Sie die Fundamentallösung $\Phi(t) = \exp(tA)$.
c) Rechnen Sie nach, daß $\Phi(t)$ für jedes *t* eine Rotationsmatrix ist.
d) Geben Sie einen Eigenvektor von $\Phi(t)$ im $\mathbb{R}^3$ an.

---

2 Um zu sehen, was los ist, lösen Sie die Aufgabe zunächst für $v = e_3$, was trivial sein sollte.